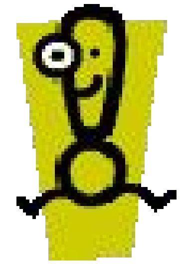
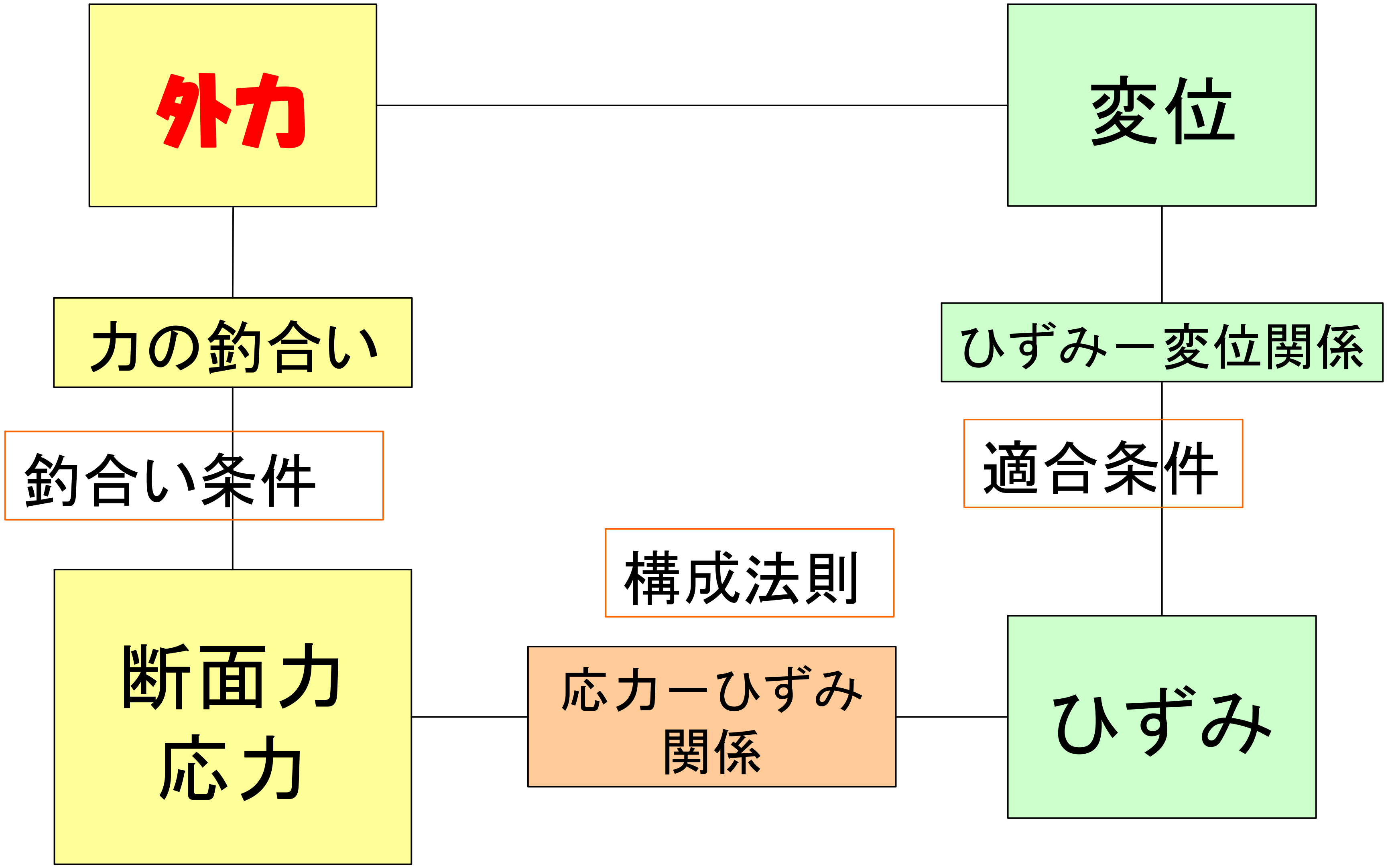
構造力学の構造

構造力学Ⅰ復習

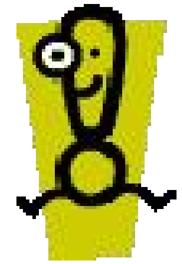
静力学の構造



大事



静力学の構造



大事

外力
第5章

第8章

変位
第6章

p.53 図4.9

力の釣合い
第5章

ひずみー変位関係
第6章

釣合い条件

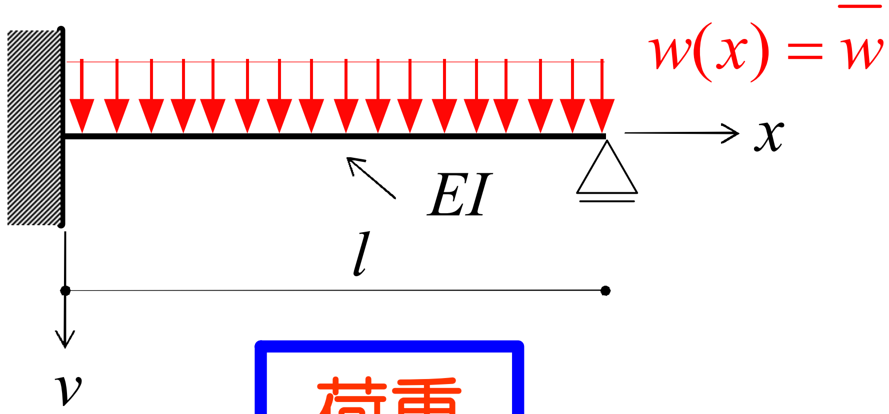
適合条件

構成法則

断面力
応力
第5章，第7章

応力ーひずみ
関係
第7章

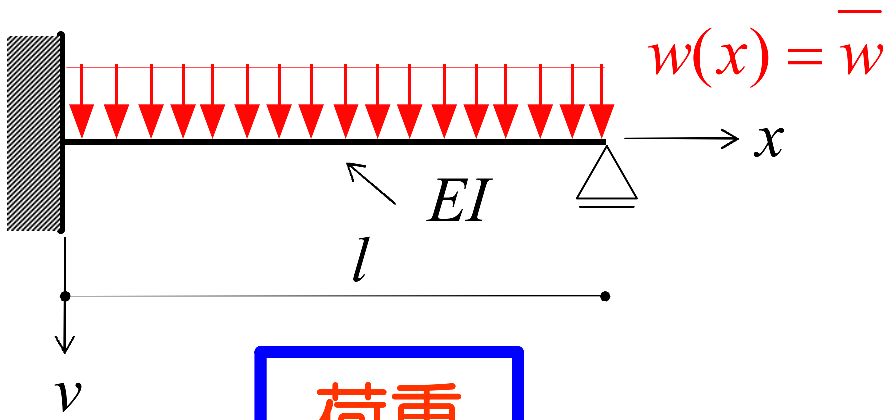
ひずみ
第6章



荷重

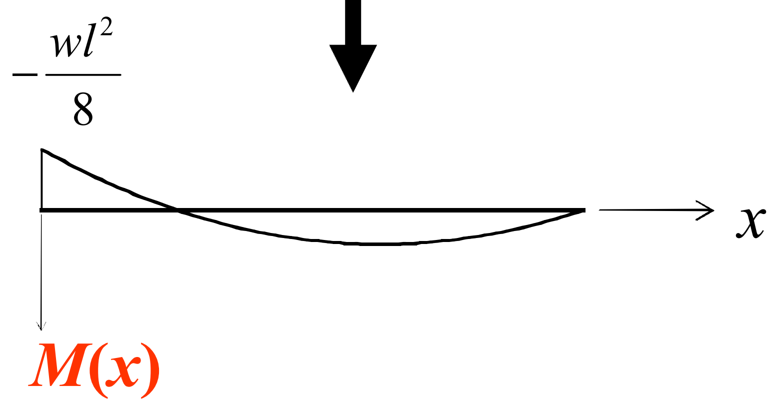
問題

- 部材各部の**断面力**（応力，内力）は？
- 部材の**変位**は？
- 部材の**ひずみ**は？

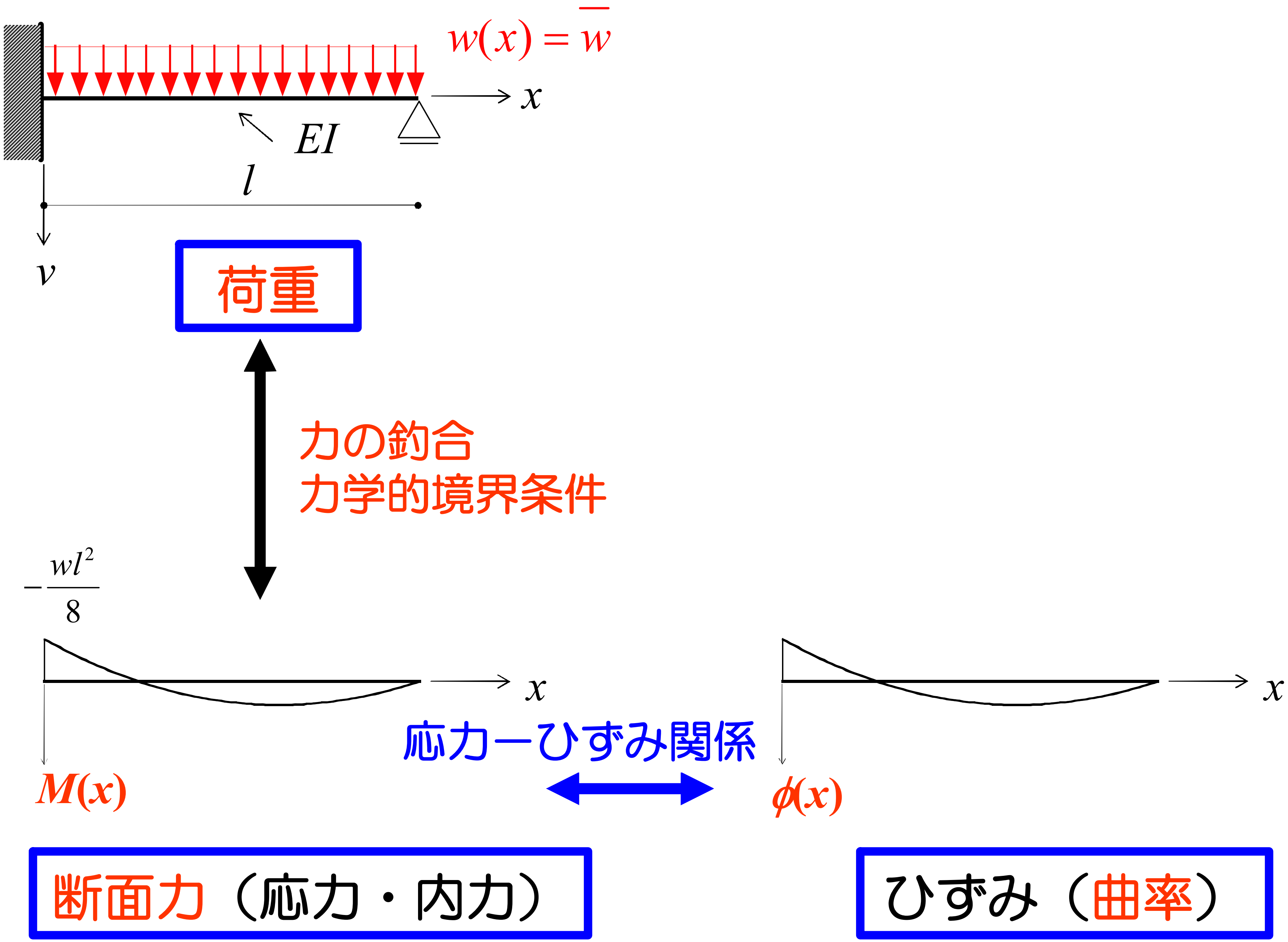


荷重

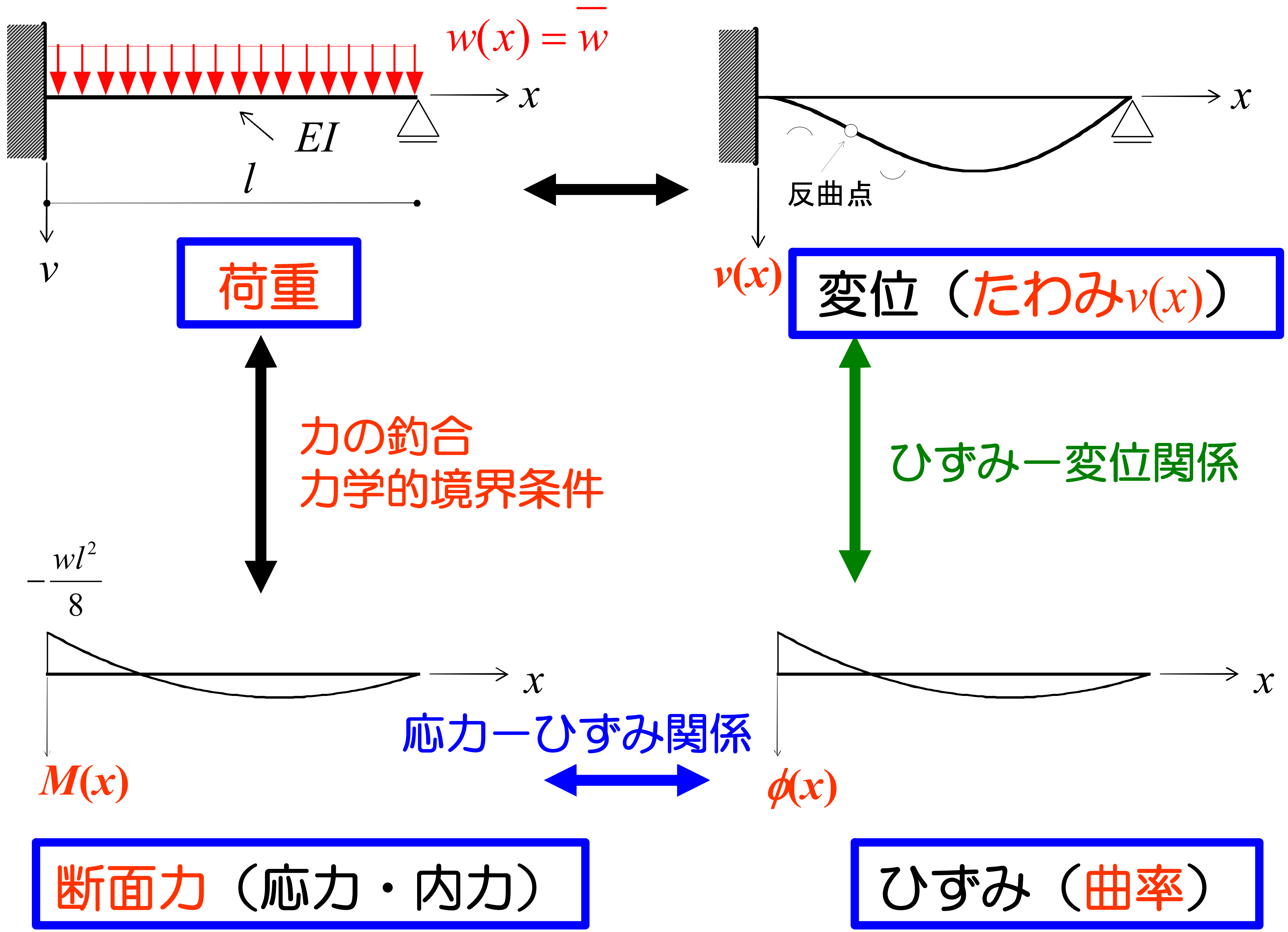
力の釣合
力学的境界条件



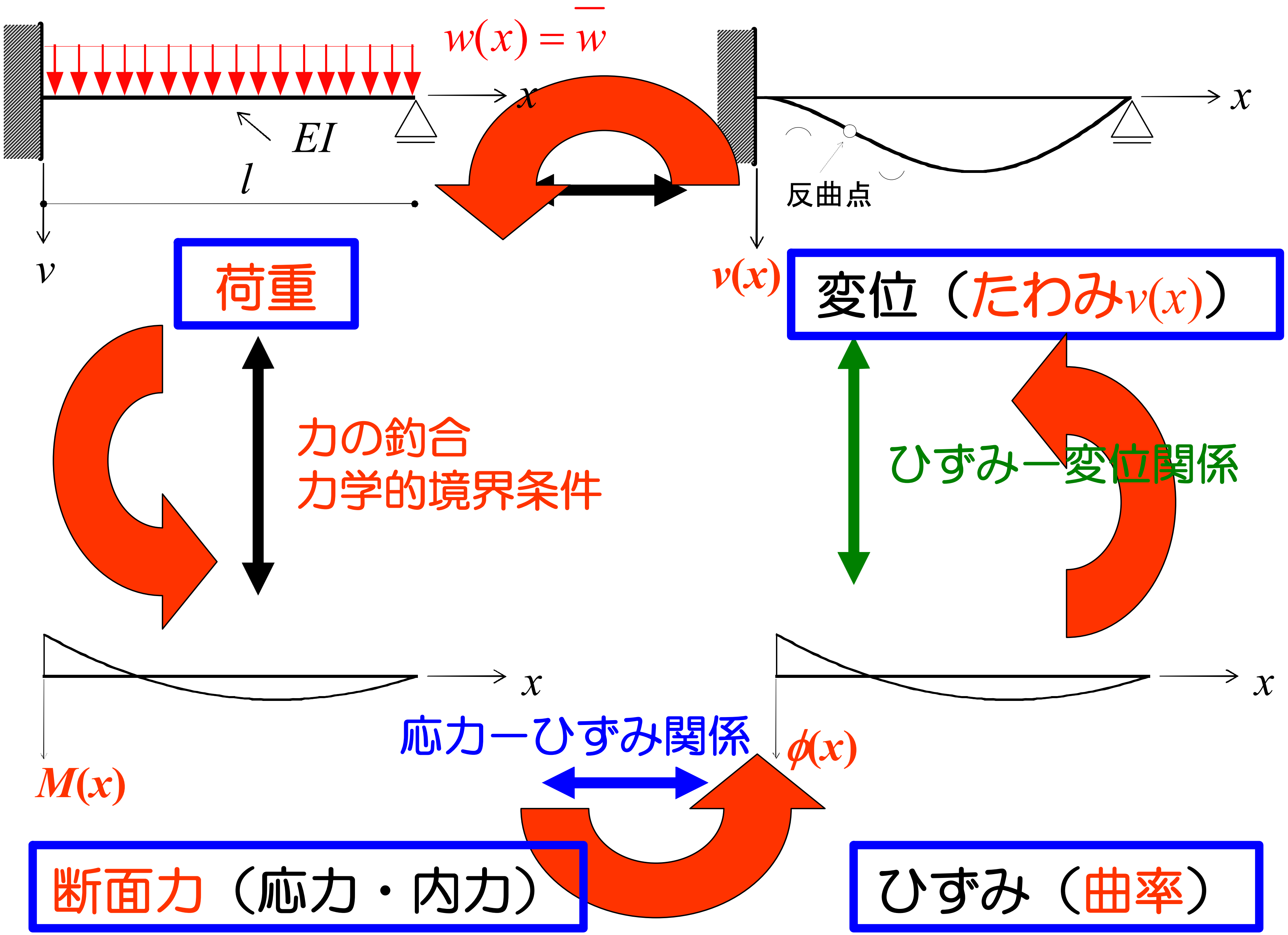
断面力（応力・内力）



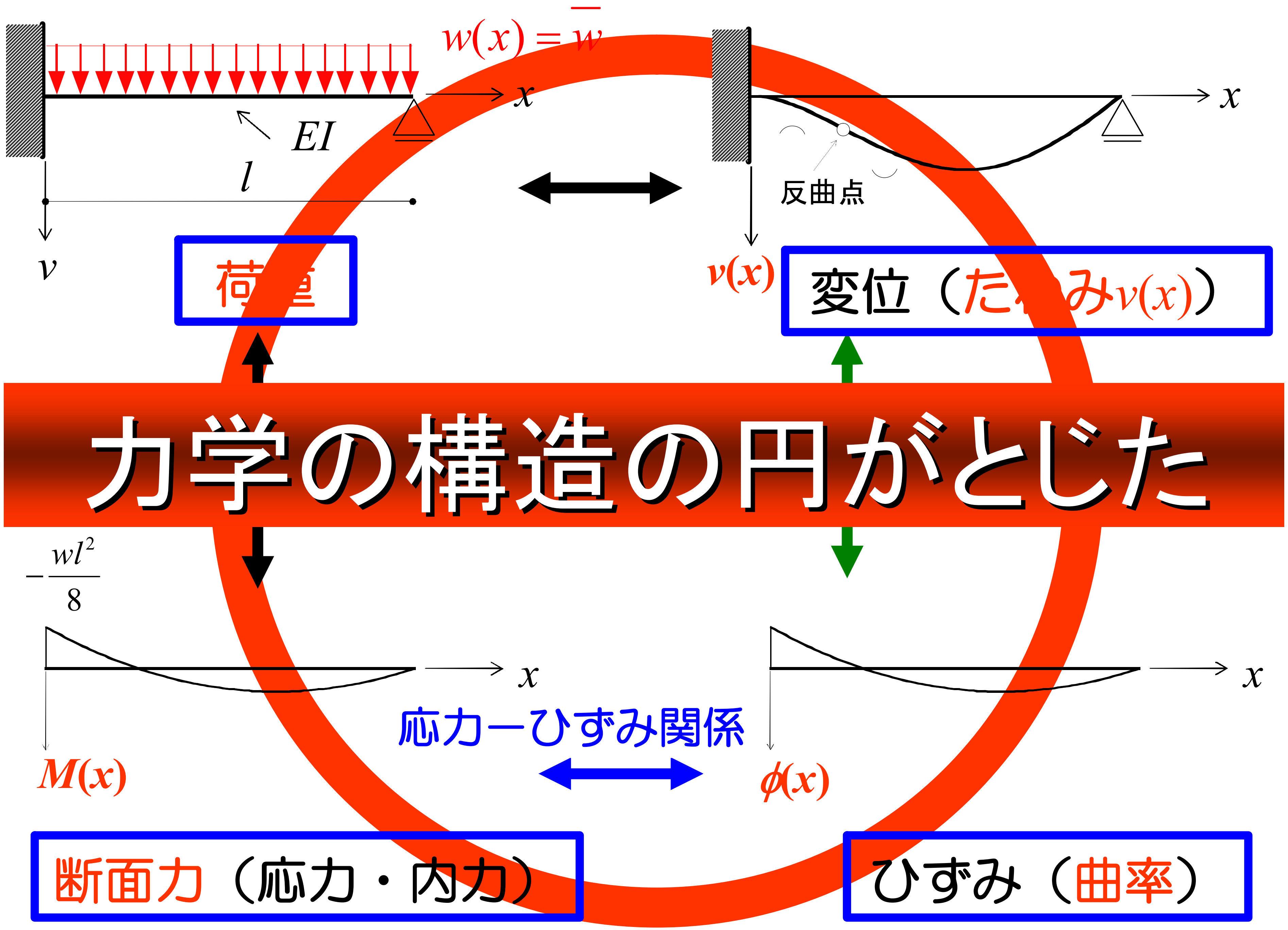
w(x) = w
x
EI
l
v
荷重
力の釣合
力学的境界条件
wl2
8
x
M(x)
応力ーひずみ関係
x
φ(x)
断面力（応力・内力）
ひずみ（曲率）



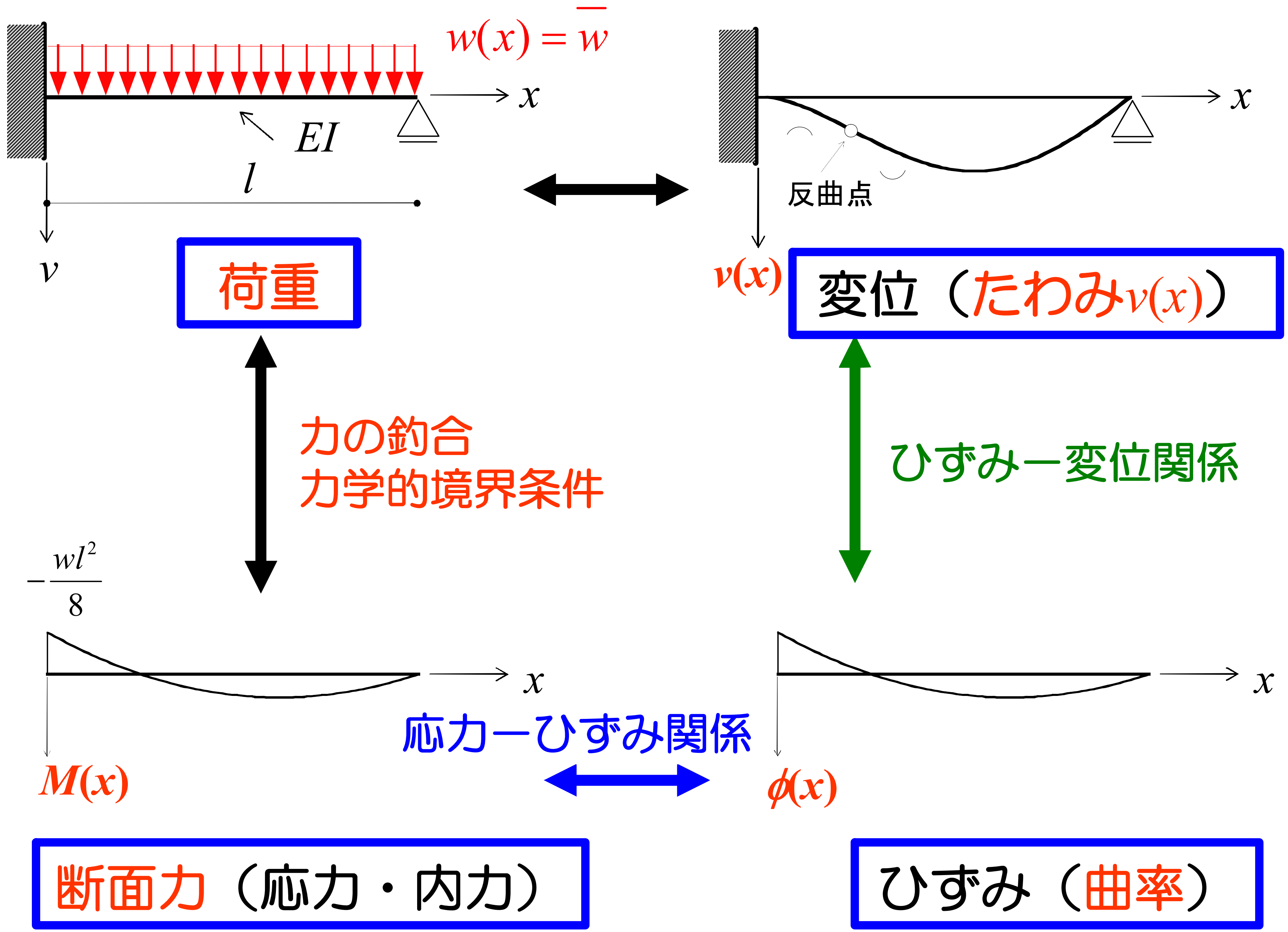
w(x) = w
x
EI
l
v
荷重
x
反曲点
v(x)
変位（たわみv(x)）
力の釣合
力学的境界条件
ひずみ－変位関係
wl2
8
x
x
応力－ひずみ関係
M(x)
φ(x)
断面力（応力・内力）
ひずみ（曲率）



$w(x) = \overline{w}$
x
EI
l
v
x
反曲点
$v(x)$
荷重
変位（たわみ$v(x)$）
力の釣合
力学的境界条件
ひずみ－変位関係
x
x
応力－ひずみ関係
$\phi(x)$
$M(x)$
断面力（応力・内力）
ひずみ（曲率）



$w(x) = \bar{w}$
x
EI
l
v
反曲点
x
$v(x)$
荷重
変位（たわみ$v(x)$）
力学の構造の円がとじた
$-\frac{wl^2}{8}$
x
x
応力ーひずみ関係
$M(x)$
$\phi(x)$
断面力（応力・内力）
ひずみ（曲率）



$w(x) = \overline{w}$
x
EI
l
v
荷重
x
反曲点
$v(x)$
変位（たわみ$v(x)$）
力の釣合
力学的境界条件
ひずみ－変位関係
$-\frac{wl^2}{8}$
x
$M(x)$
応力－ひずみ関係
x
$\phi(x)$
断面力（応力・内力）
ひずみ（曲率）

数学は科学の言葉である

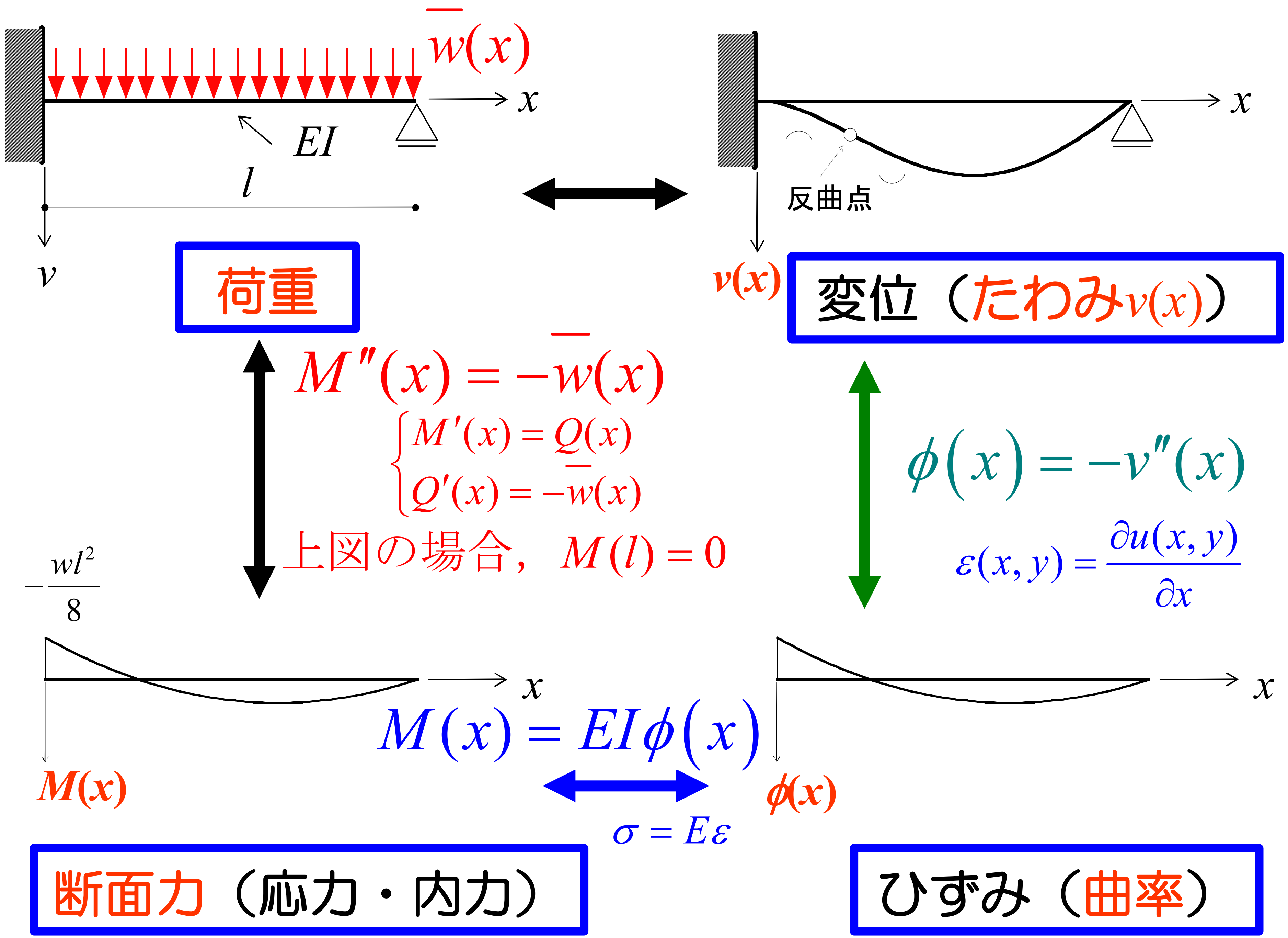
ガリレオ

力学は
建築構造の言葉である

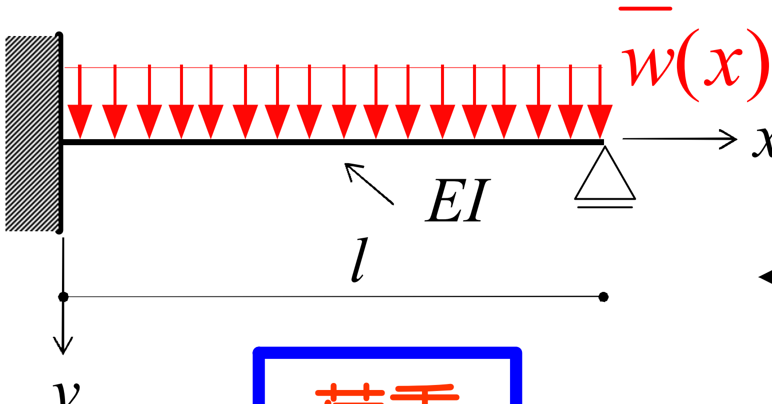
力学が構造を生み，
構造が空間を実体化し，
空間が建築を規定する

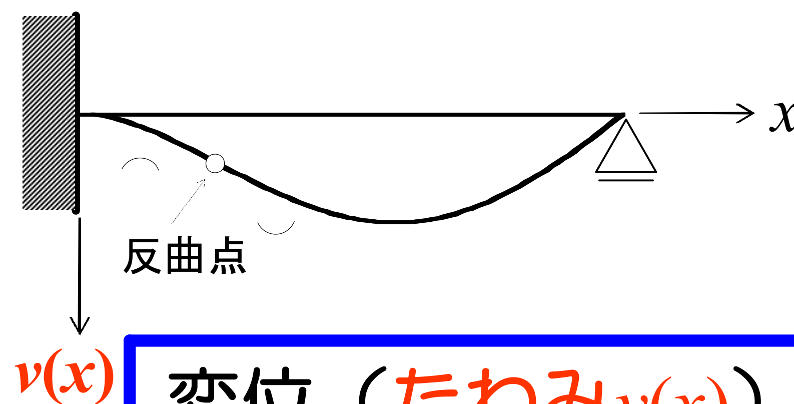
「力学ー構造ー空間ー建築」の流れにおいて，
「力学」は「建築」に結びつく．

斎藤公男：「建築の構造とデザイン」の序より



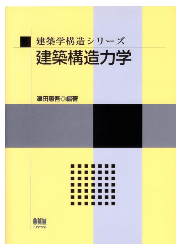
$\bar{w}(x)$
x
EI
l
v
反曲点
$v(x)$
荷重
変位（たわみ$v(x)$）
$M''(x) = -\bar{w}(x)$
$\begin{cases} M'(x) = Q(x) \\ Q'(x) = -\bar{w}(x) \end{cases}$
上図の場合，$M(l) = 0$
$\phi(x) = -v''(x)$
$\varepsilon(x,y) = \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$
$-\dfrac{wl^2}{8}$
$M(x)$
$M(x) = EI\phi(x)$
$\sigma = E\varepsilon$
$\phi(x)$
断面力（応力・内力）
ひずみ（曲率）





荷重

変位（たわみ$v(x)$）



p.68 &p.73

$$M''(x) = -\overline{w}(x)$$

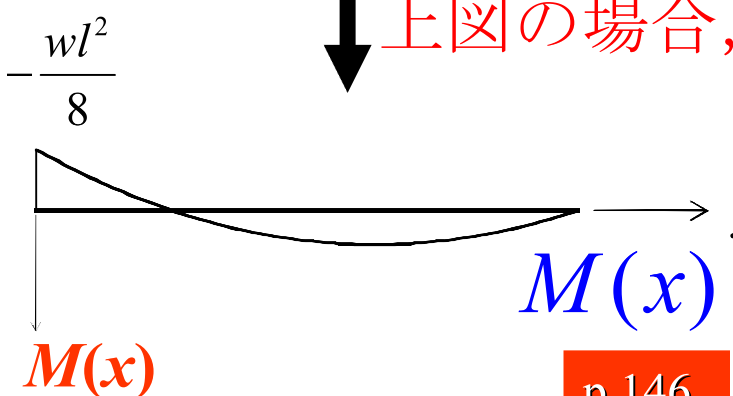
$$\begin{cases} M'(x) = Q(x) \\ Q'(x) = -\overline{w}(x) \end{cases}$$

上図の場合，$M(l) = 0$

p.135

$$\phi(x) = -v''(x)$$

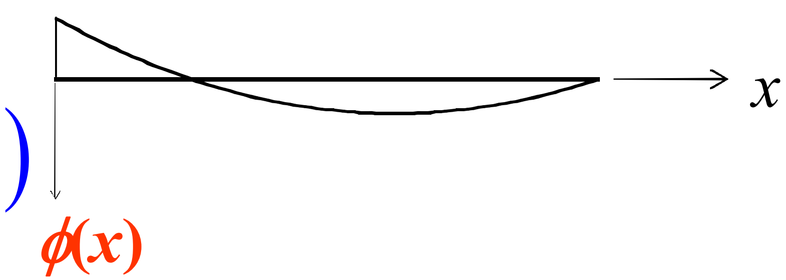
$$\varepsilon(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$$



$$M(x) = EI\phi(x)$$

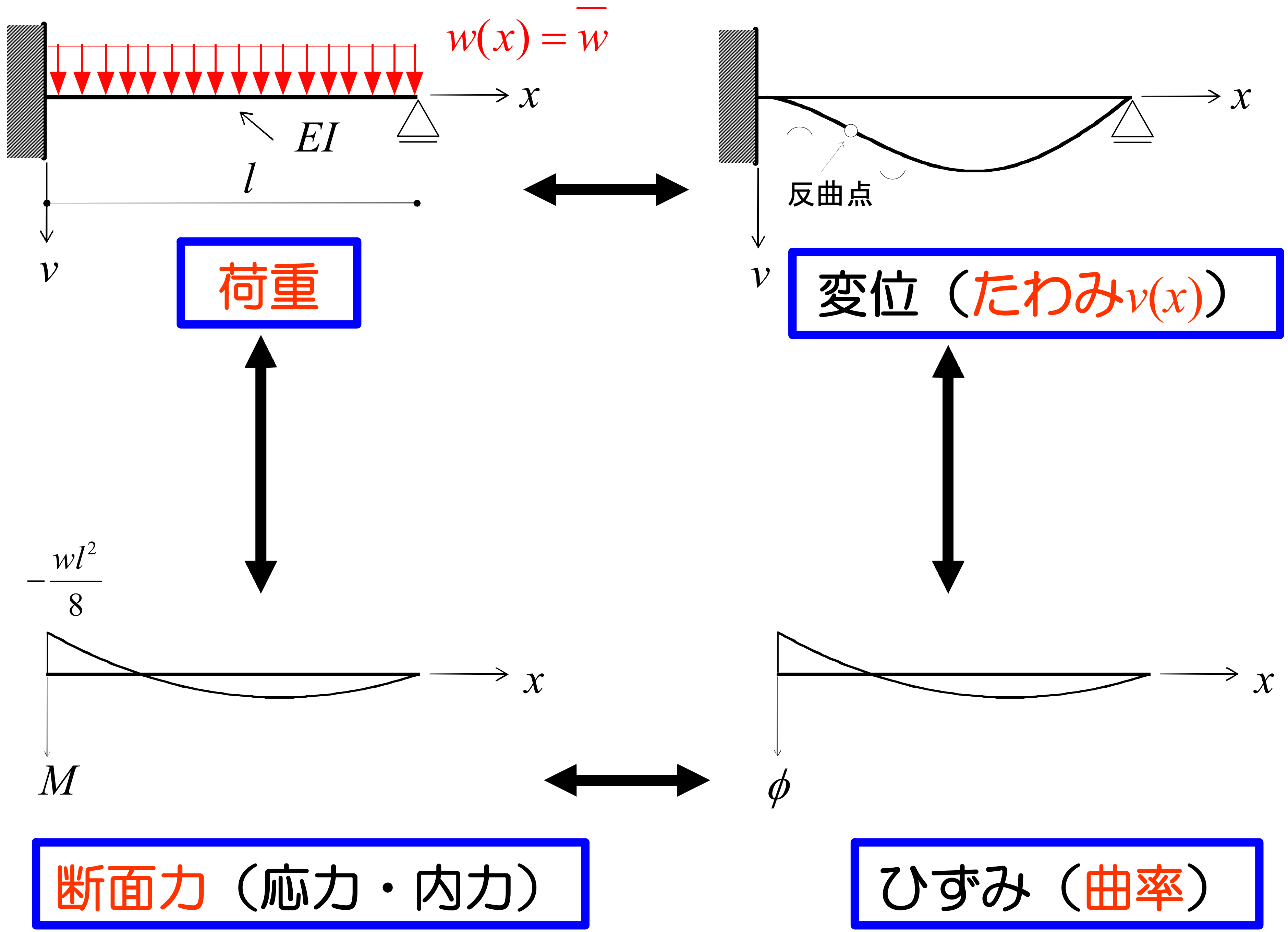
p.146

$\sigma = E\varepsilon$



断面力（応力・内力）

ひずみ（曲率）



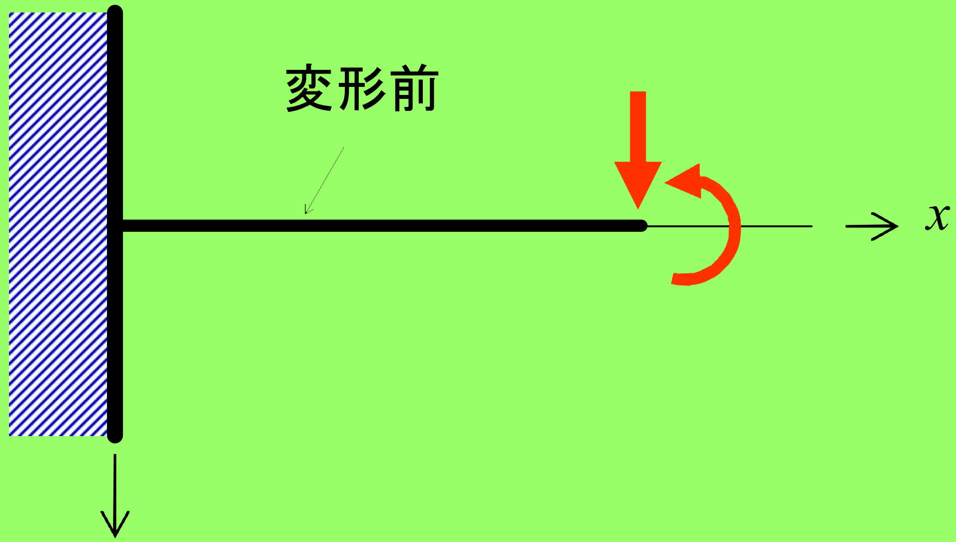
$w(x) = \overline{w}$
x
EI
l
v
荷重
x
反曲点
v
変位（たわみ$v(x)$）
$-\frac{wl^2}{8}$
x
M
x
ϕ
断面力（応力・内力）
ひずみ（曲率）

４つの量

外力・荷重

外力，サンブナンの原理，
体積力，分布荷重

p.57



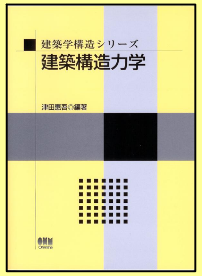
集中荷重，モーメント荷重

外力・荷重　1

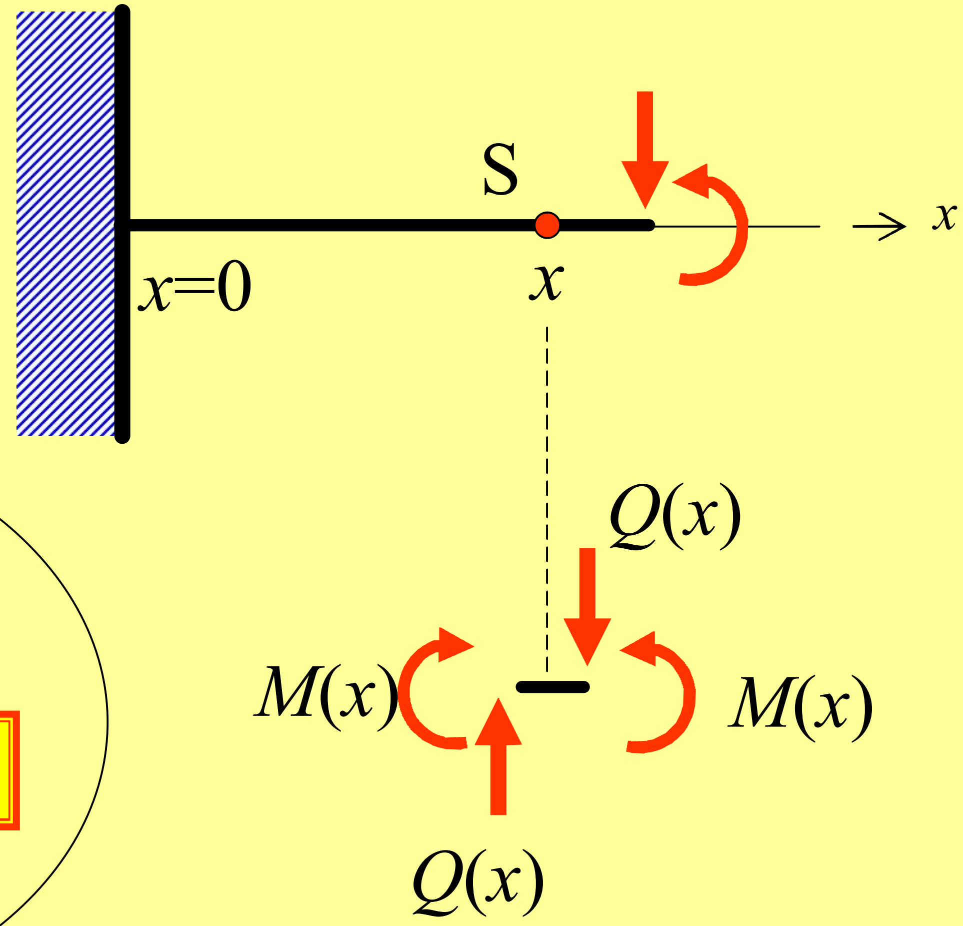
応力・断面力

応力・断面力の正負，座標変換,テンソル

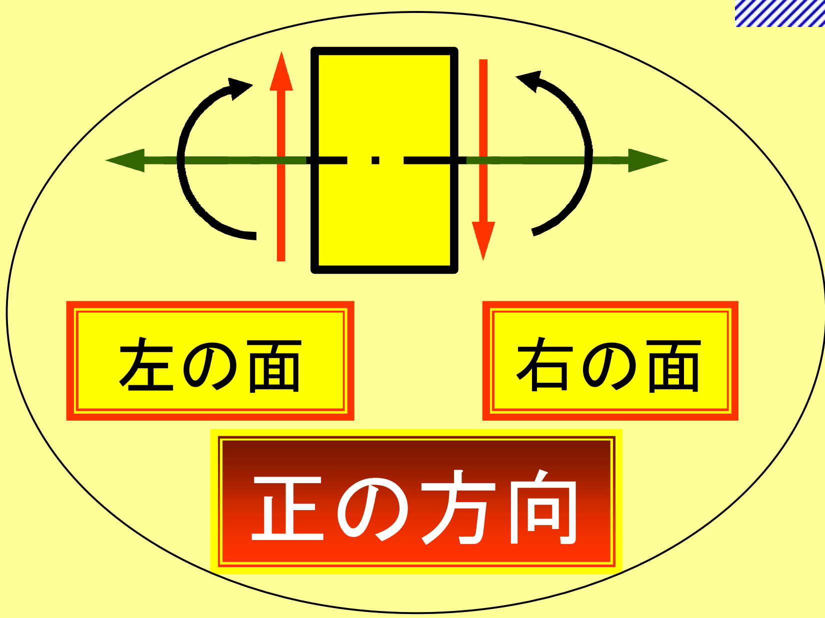
断面力（M，Q，N）　$\Leftrightarrow$　応力（σ，τ）



p.65，75



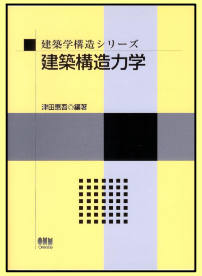
断面力の正方向



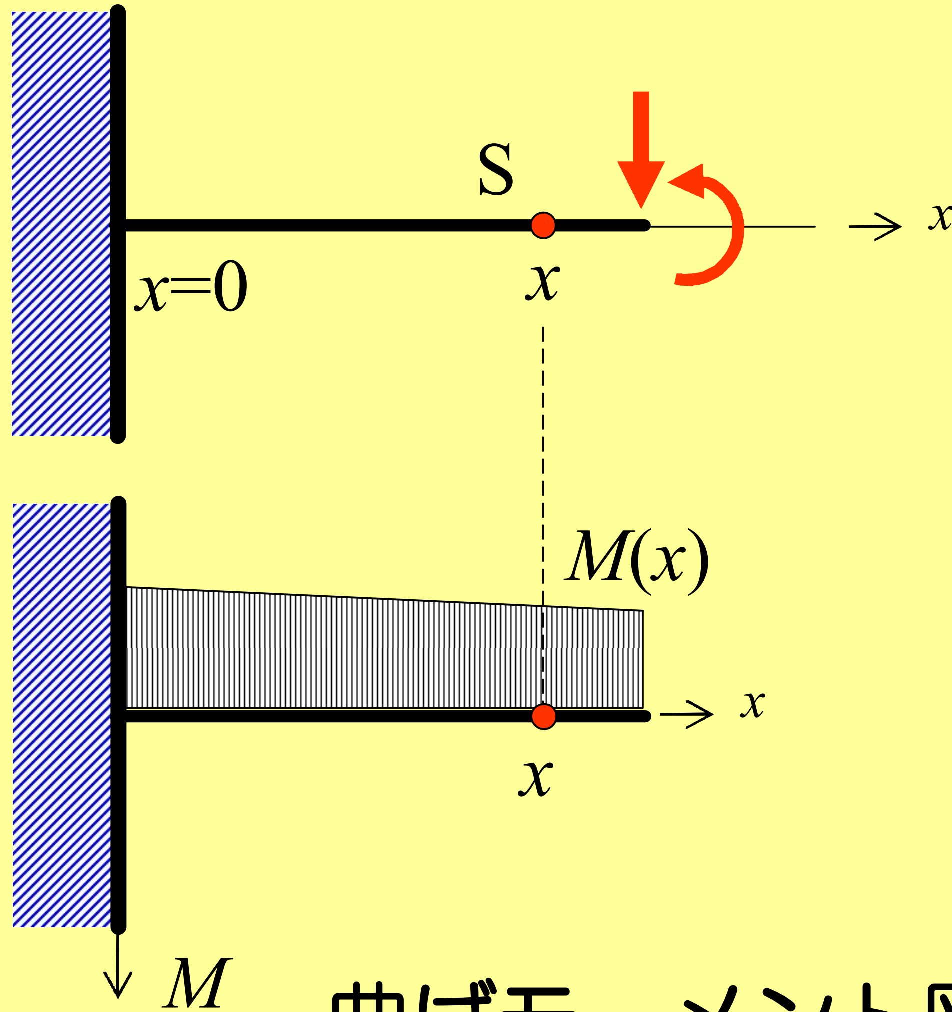
作用・反作用の法則

右の面，左の面

断面力・応力　1

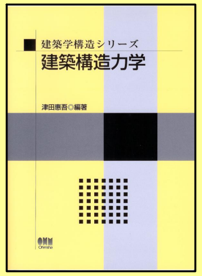


p.75

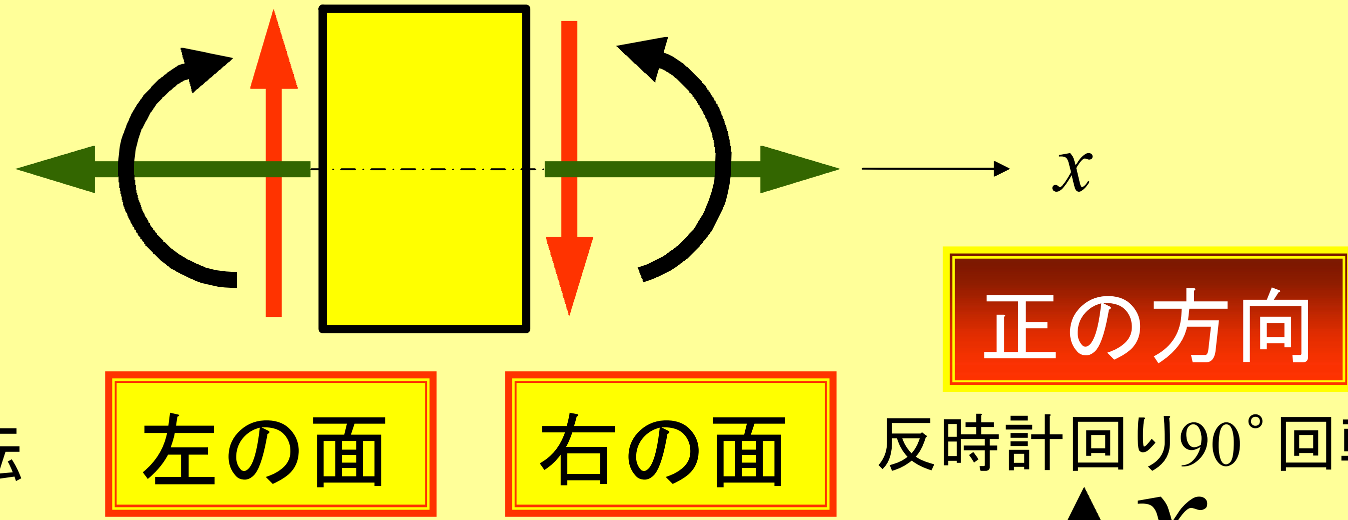


曲げモーメント図

断面力・応力　2

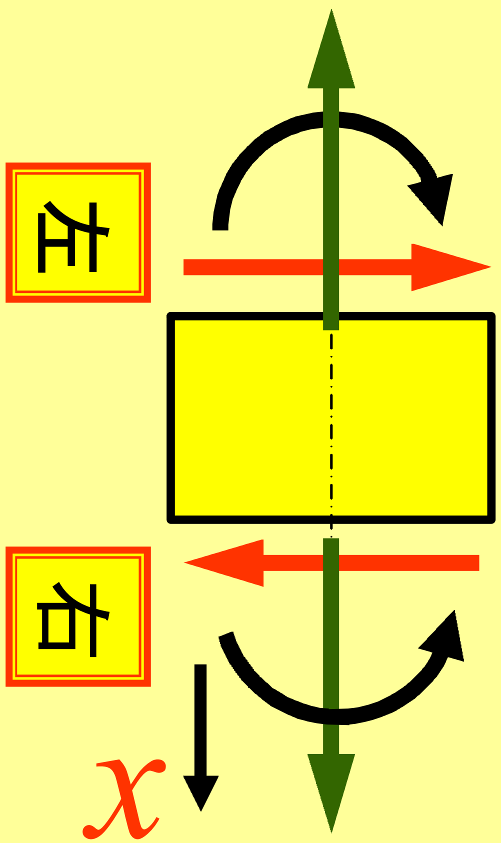


p.65



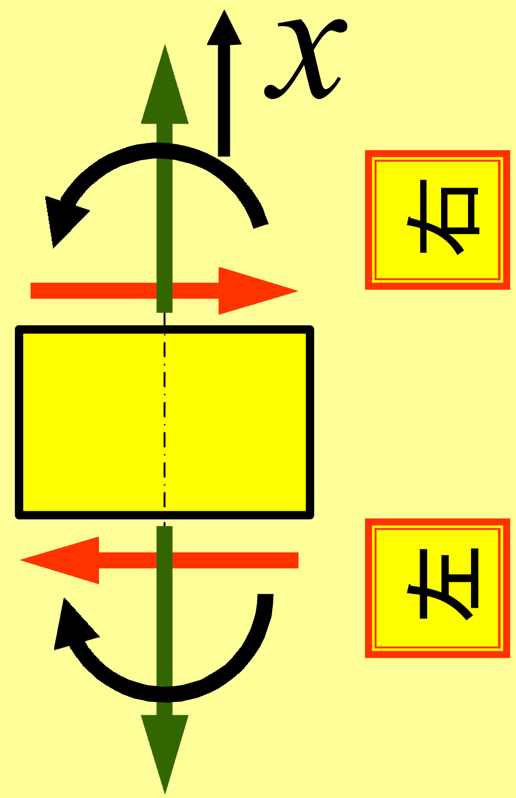
時計回り90°回転

反時計回り90°回転



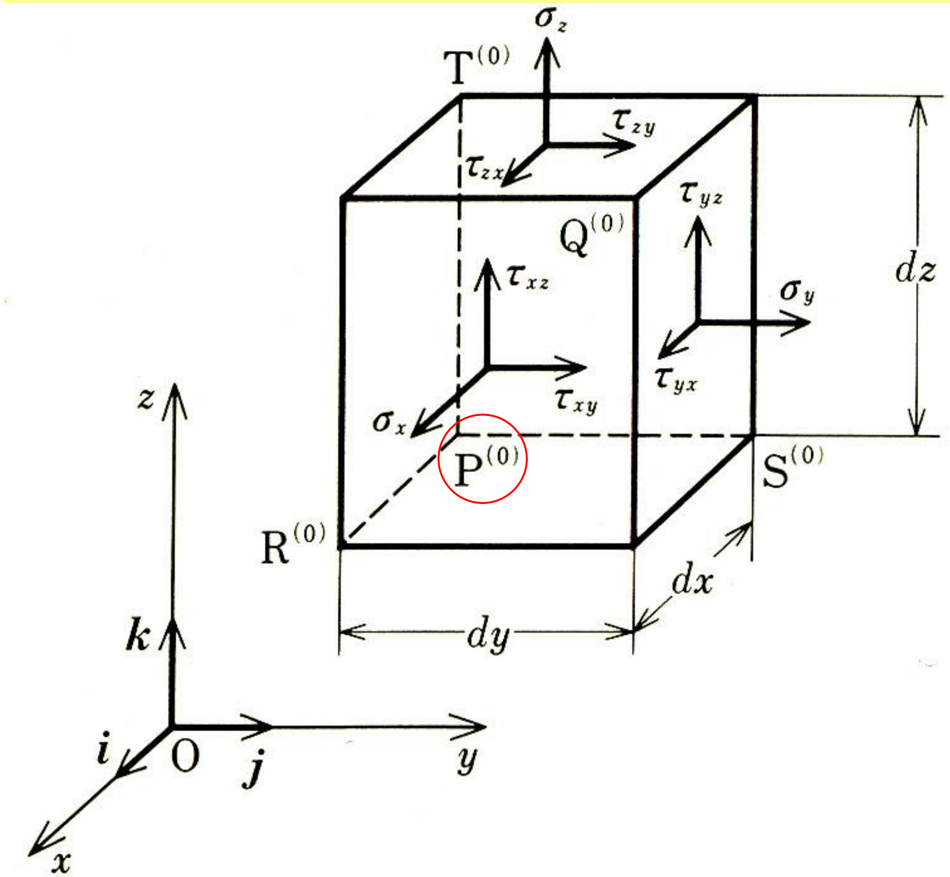
柱のように材軸が鉛直方向になった時, Q, N の方向はどちらの面を左としても同じだが, M は方向が変わる.

→ 引張側にモーメント図を描く.



曲げモーメント図

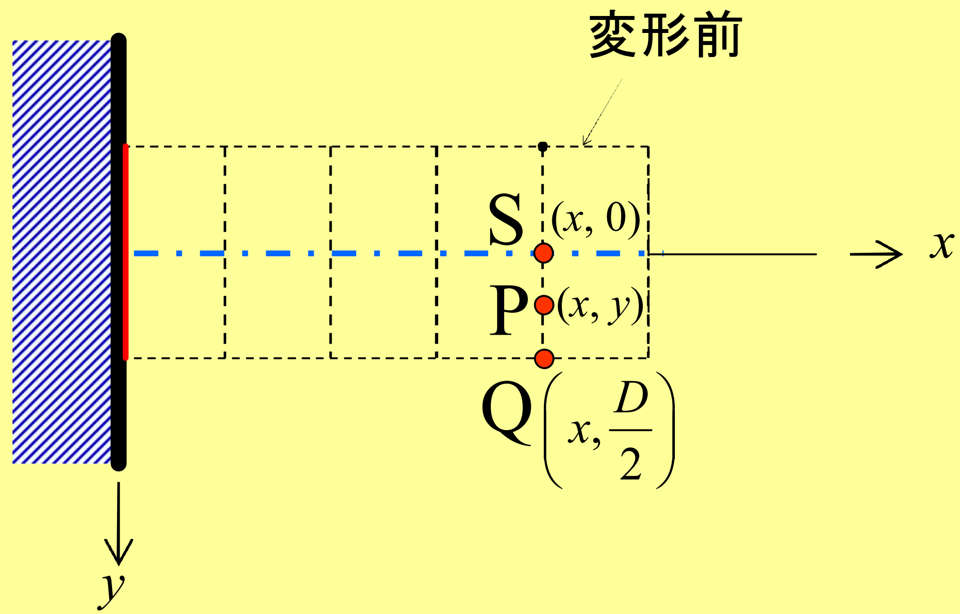
●応力



物体内の任意の1点 $P^{(0)}$の応力

6個の側面に作用する単位面積当りの内力の$dx \to 0$, $dy \to 0$, $dz \to 0$とした極限の値

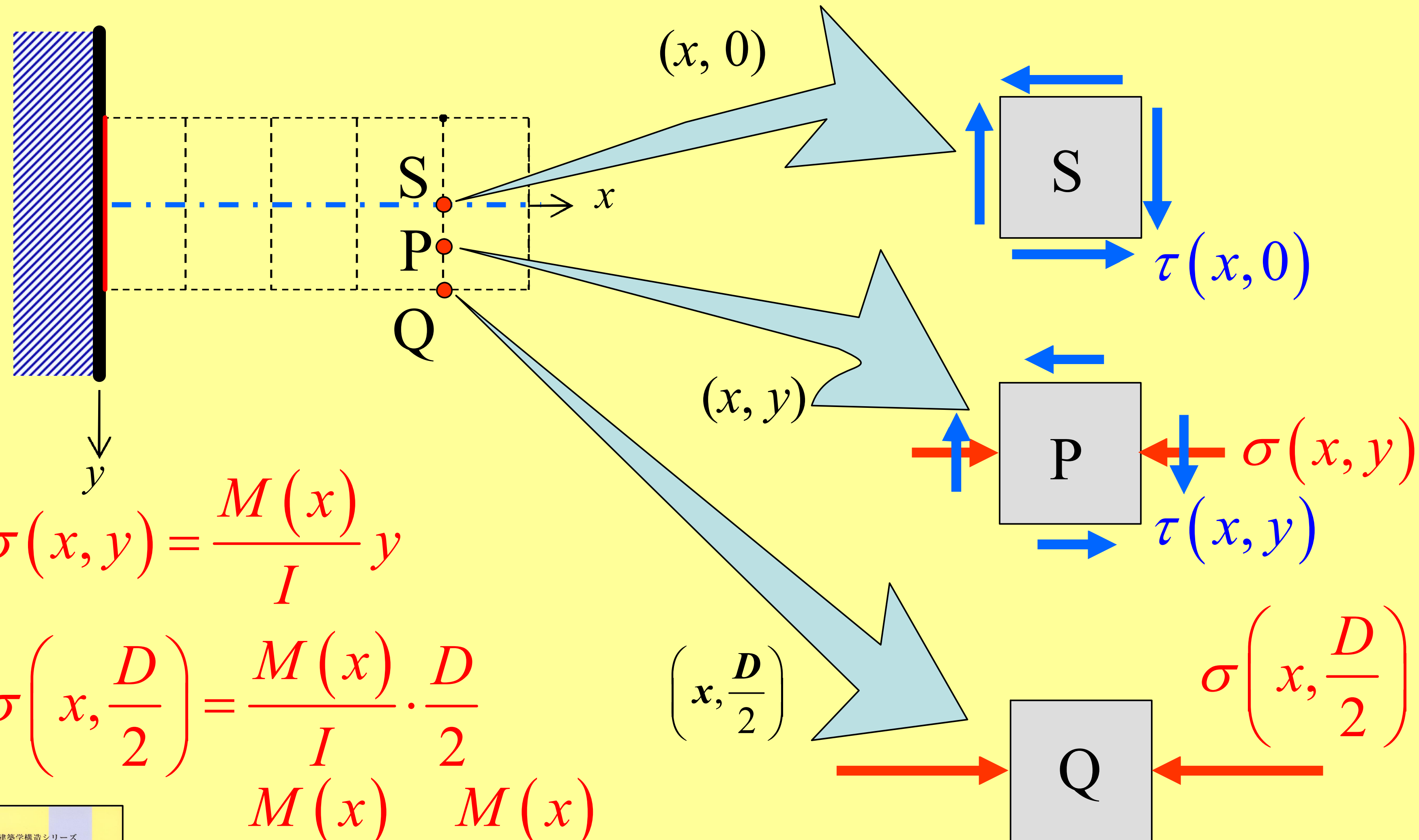
$$
\begin{bmatrix}
\sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\
\tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\
\tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z
\end{bmatrix}
$$



xの座標を持つ3つの点　S，P，Q

断面力・応力　4

断面力・応力　5



$$\sigma(x,y)=\frac{M(x)}{I}y$$

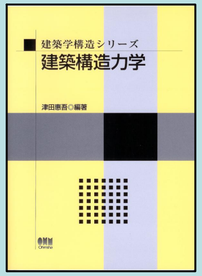
$$\sigma\left(x,\frac{D}{2}\right)=\frac{M(x)}{I}\cdot\frac{D}{2}$$

$$=\frac{M(x)}{\dfrac{I}{\left(\dfrac{D}{2}\right)}}\equiv\frac{M(x)}{Z}$$

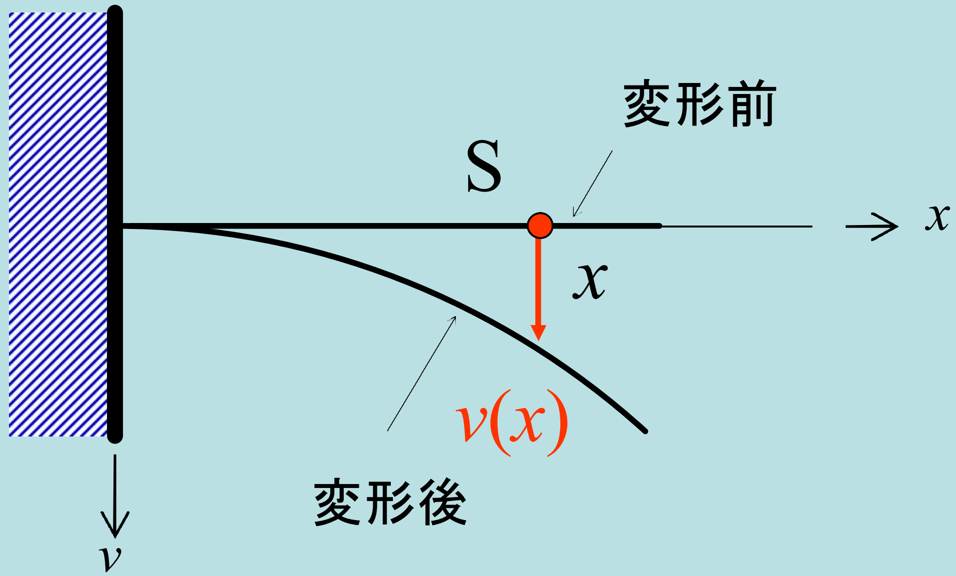
p.150，158

変位・たわみ

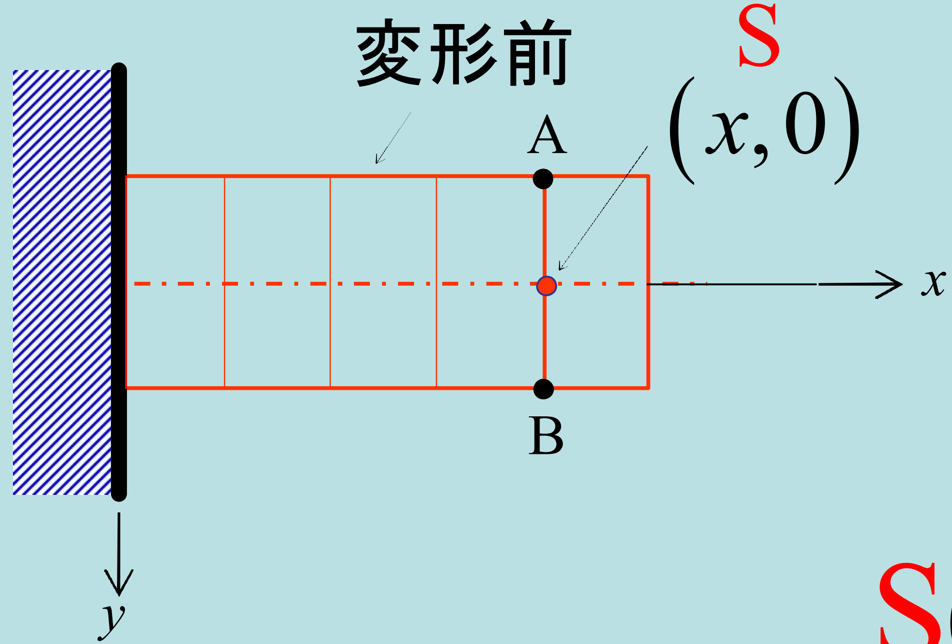
変位ベクトル，平面保持の仮定



p.168



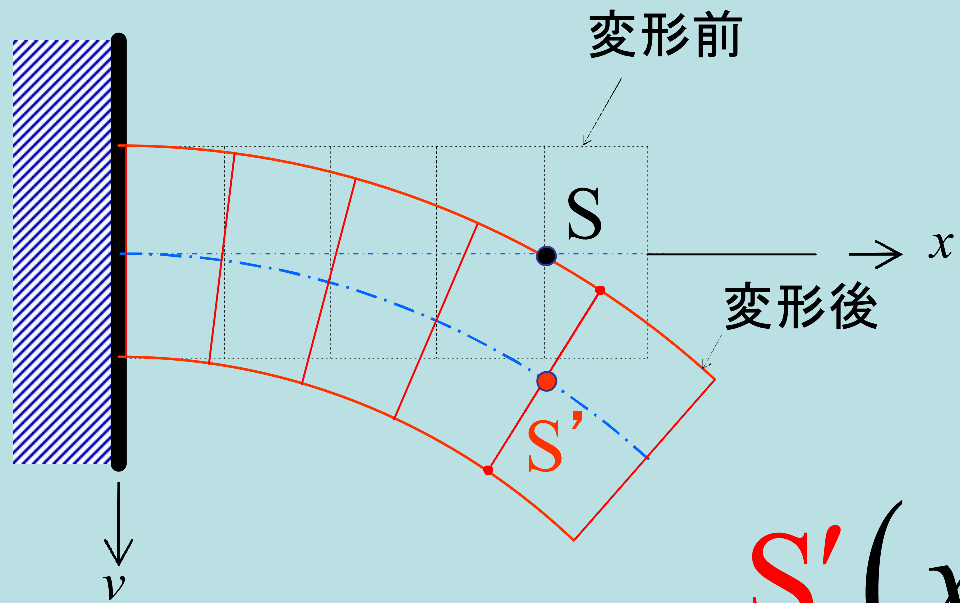
変位・たわみ1



$\mathrm{S}(x,0)$

変形前の点S $(x,0)$

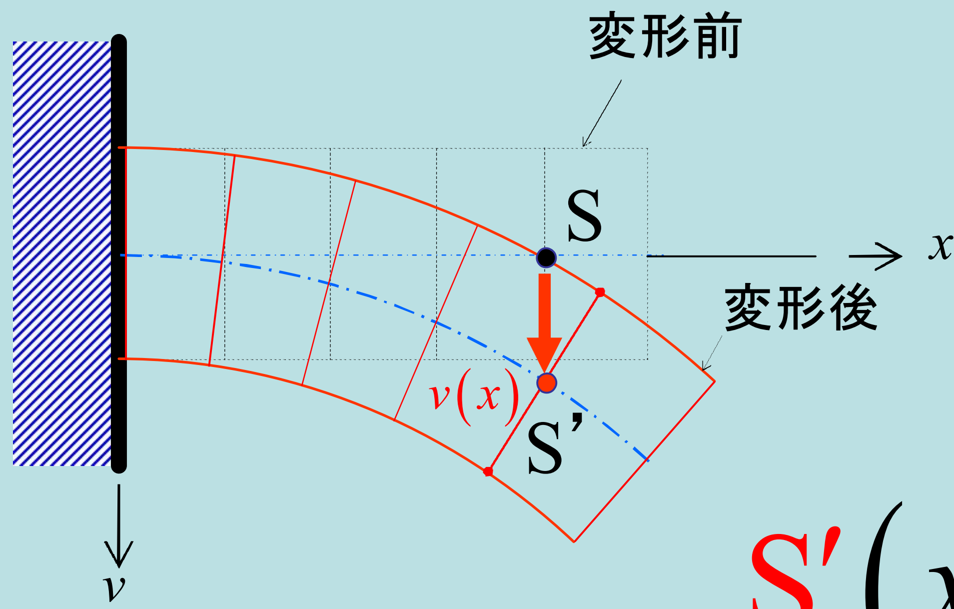
変位・たわみ2



$$S'\left(x, v(x)\right)$$

変形後の点S’（x, 0）

変位・たわみ3



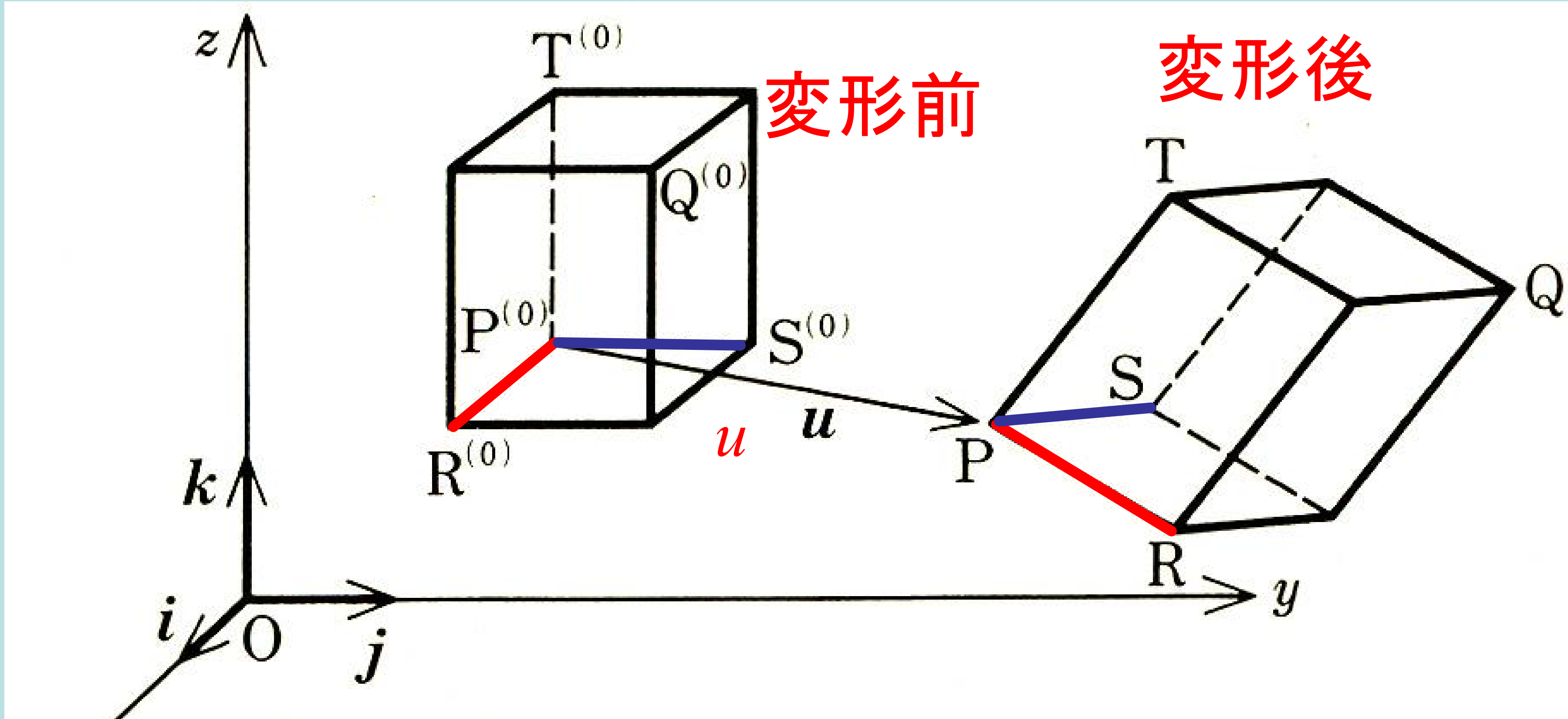
$$S'\left(x, v\left(x\right)\right)$$

変形後の点：点Sが材軸と直交方向に動く

材軸線は伸び縮みしないこととしていることになる.

変形後の点S'$(x, v(x))$

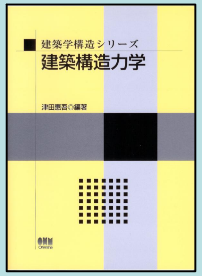
変位・たわみ4



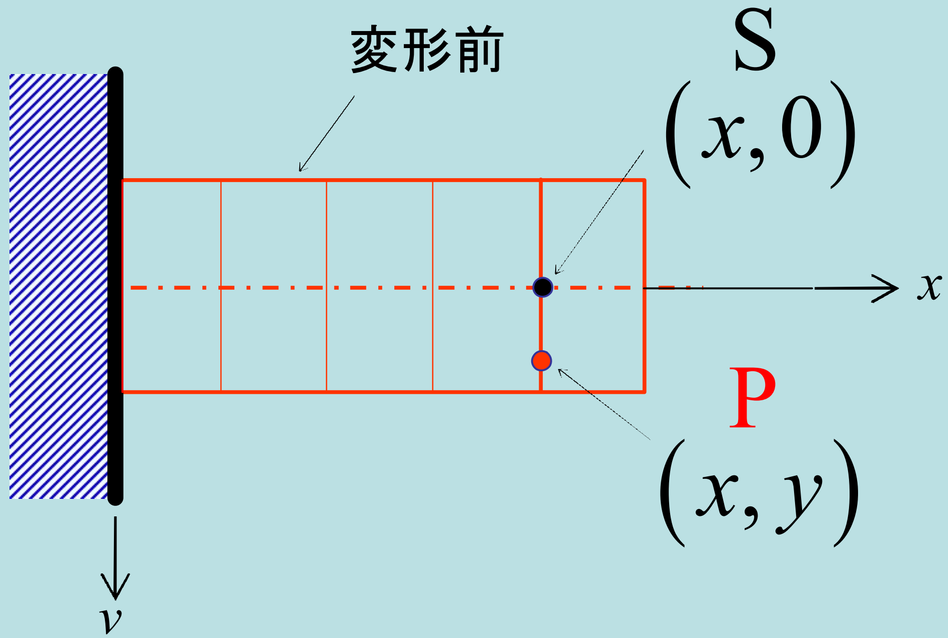
変形前物体にとりつけられていた微小直6面体

$P^{(0)}Q^{(0)}R^{(0)}S^{(0)}T^{(0)}$は変形後PQRSTに変形する

変位ベクトル

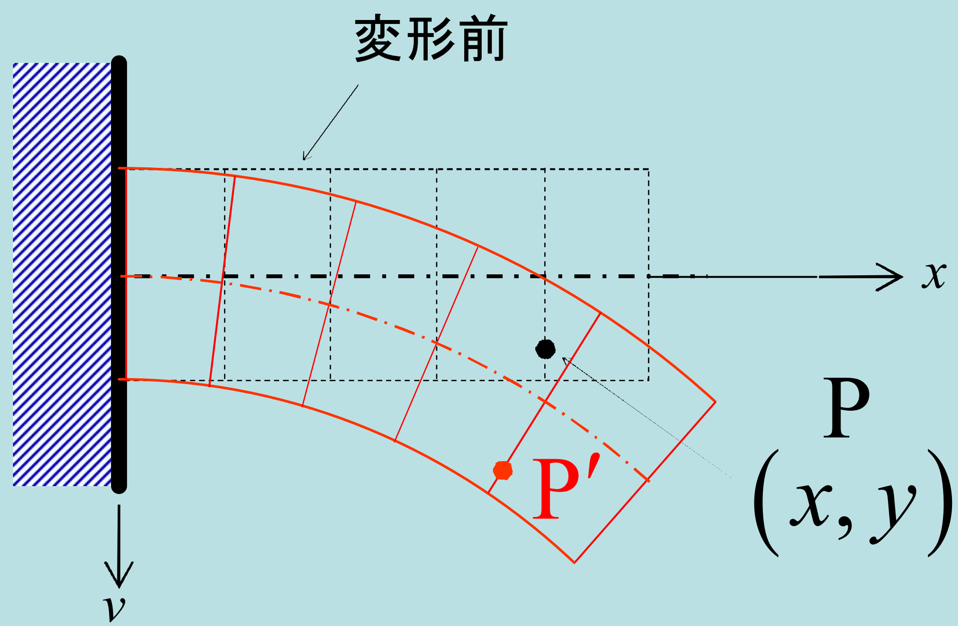


p.131



変形前の点P(x, y)

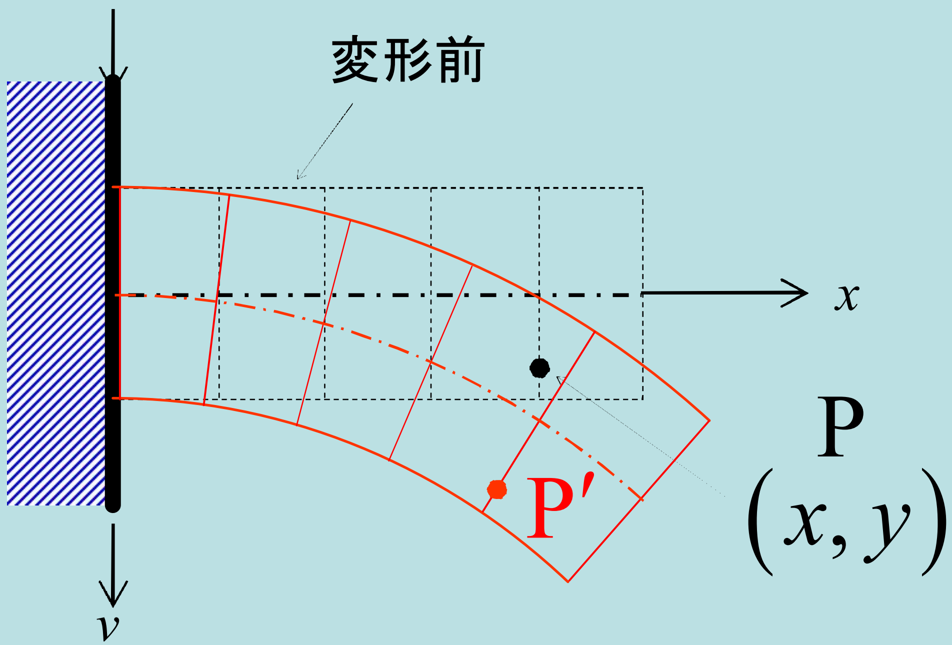
変位・たわみ5

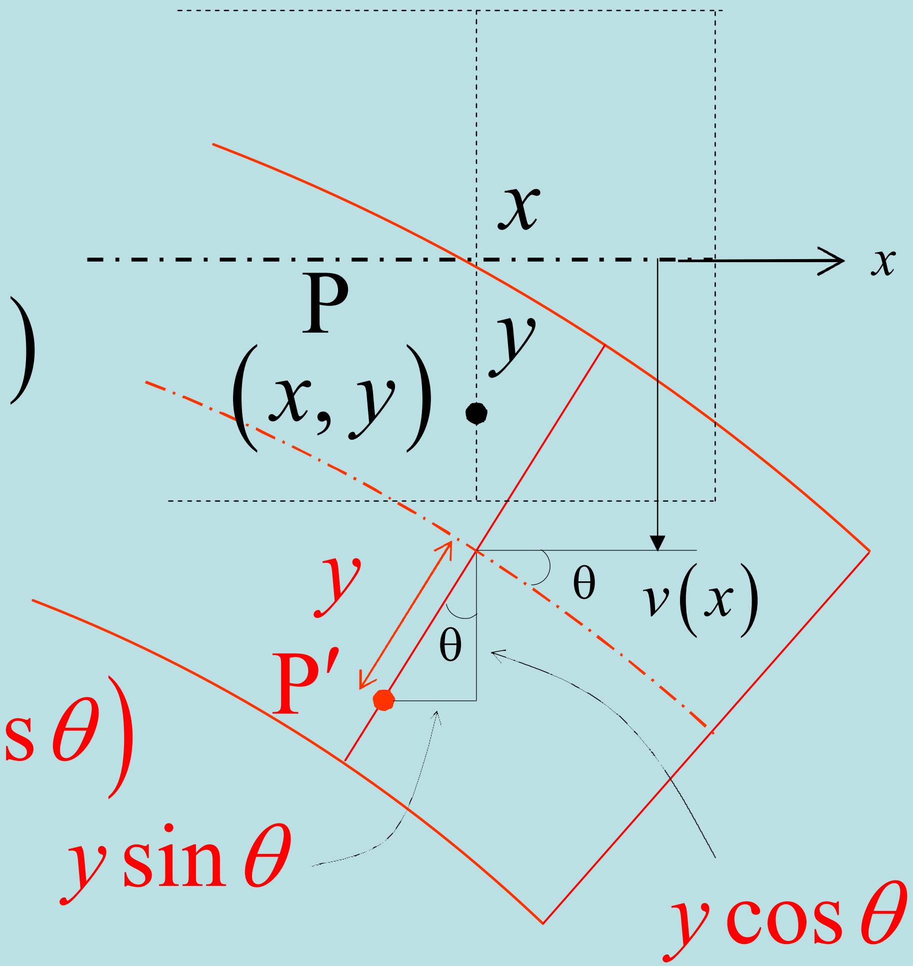


変形後の点P’

変位・たわみ6

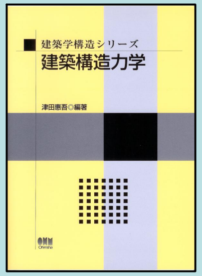
変位・たわみ7





$$\mathrm{P}'\left(x - y\sin\theta, v(x) + y\cos\theta\right)$$

平面保持の仮定



変位・たわみ8

p.131

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}} = \overrightarrow{\mathrm{OP'}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

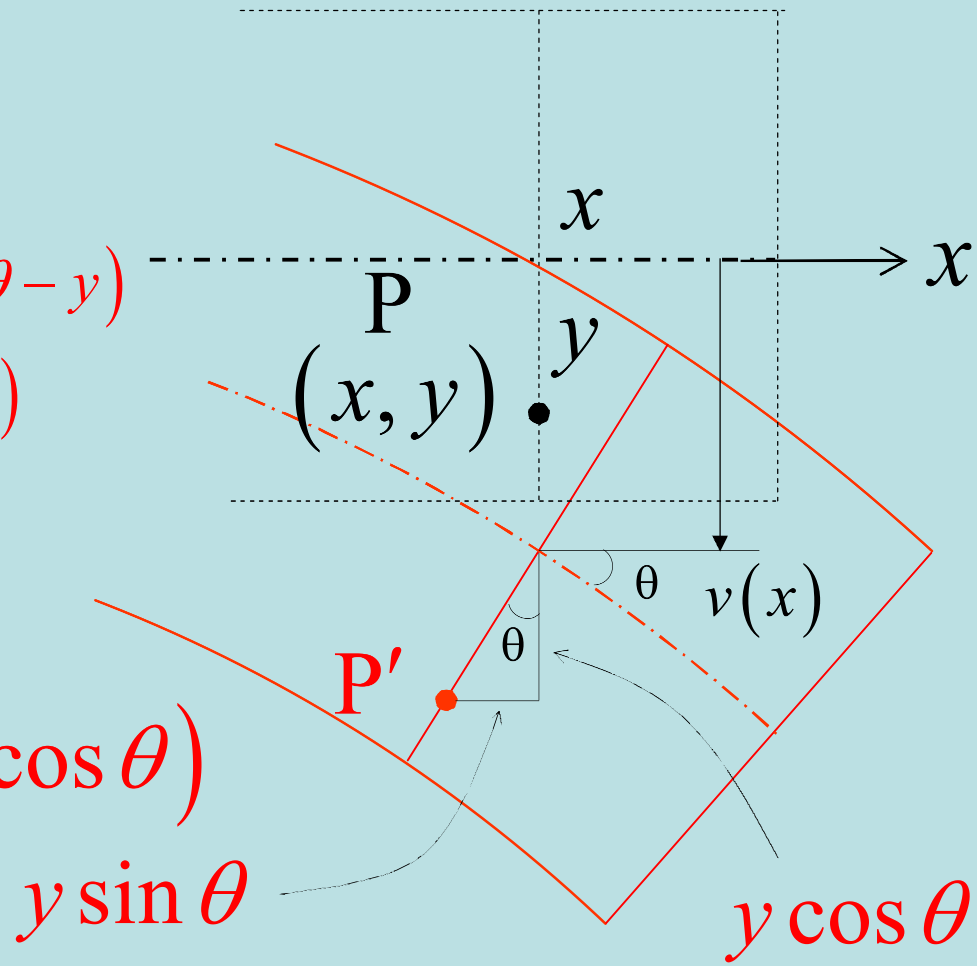
$$= \left(x - y\sin\theta - x, v(x) + y\cos\theta - y\right)$$

$$= \left(-y\sin\theta, v(x) - y(1-\cos\theta)\right)$$

$$\approx \left(-y\tan\theta, v(x)\right)$$

$$= \left(-yv'(x), v(x)\right)$$

$$\mathrm{P'}\left(x - y\sin\theta, v(x) + y\cos\theta\right)$$

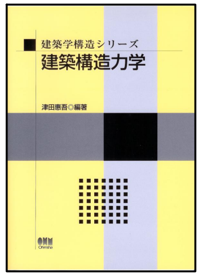


ひずみ

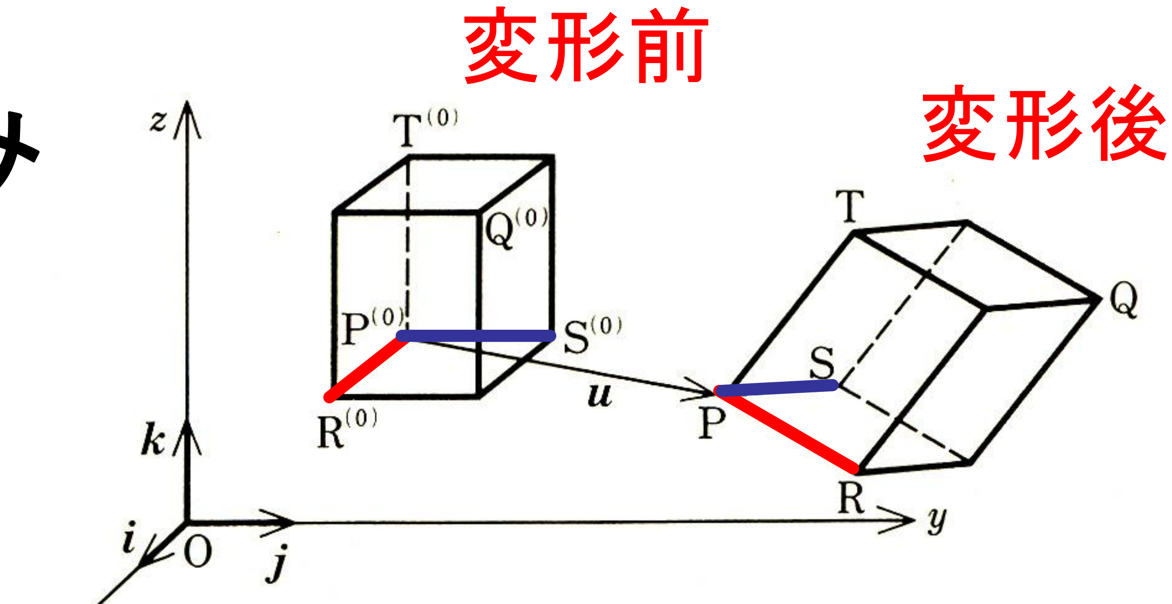
線素，長さの変化，角度の変化，テンソル

曲率

●ひずみ



p.129



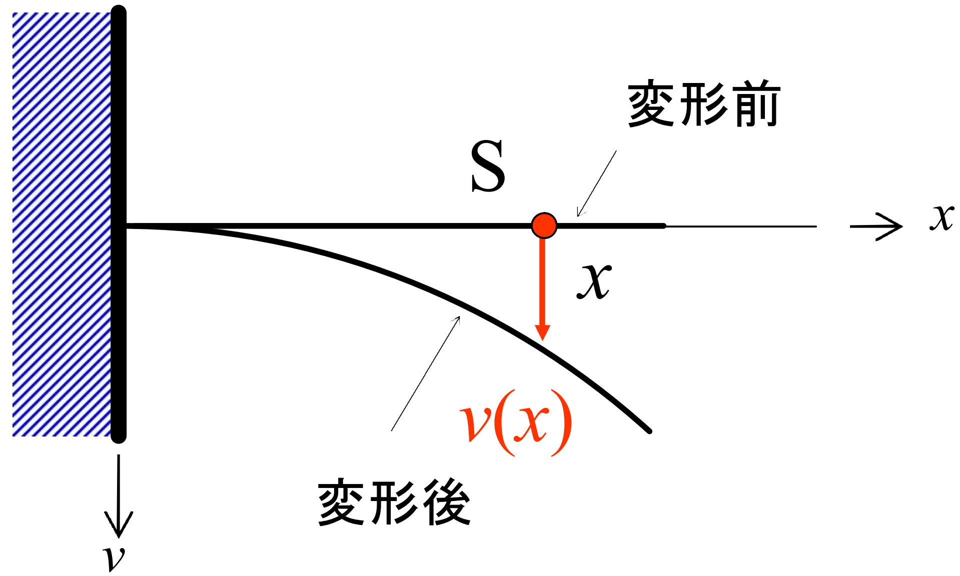
変形前物体にとりつけられていた微小直6面体
$P^{(0)}Q^{(0)}R^{(0)}S^{(0)}T^{(0)}$は変形後PQRSTに変形する

$P^{(0)}$のひずみ

$$\frac{\mathbf{PR}-\mathbf{P}^{(0)}\mathbf{R}^{(0)}}{\mathbf{P}^{(0)}\mathbf{R}^{(0)}},\ \frac{\mathbf{PS}-\mathbf{P}^{(0)}\mathbf{S}^{(0)}}{\mathbf{P}^{(0)}\mathbf{S}^{(0)}},\ \frac{\mathbf{PT}-\mathbf{P}^{(0)}\mathbf{T}^{(0)}}{\mathbf{P}^{(0)}\mathbf{T}^{(0)}}$$

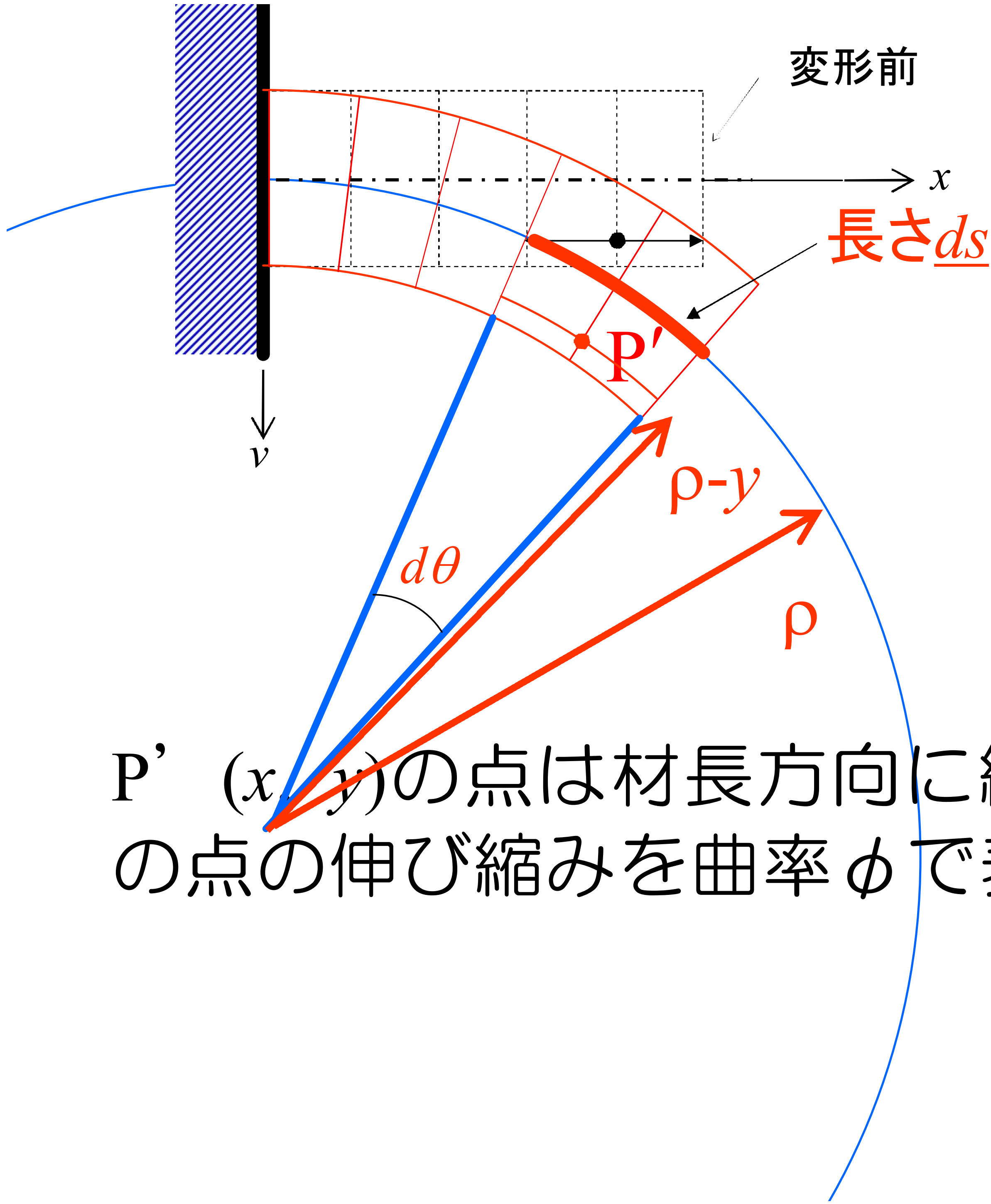
$$\frac{\pi}{2}-\angle\mathbf{SPT},\ \frac{\pi}{2}-\angle\mathbf{TPR},\ \frac{\pi}{2}-\angle\mathbf{RPS}$$

の$dx\rightarrow 0$, $dy=0$, $dz=0$とした極限の値



線であれば，伸び縮みしかない

ひずみ1



$$\rho d\theta = ds$$

$$\phi \equiv \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

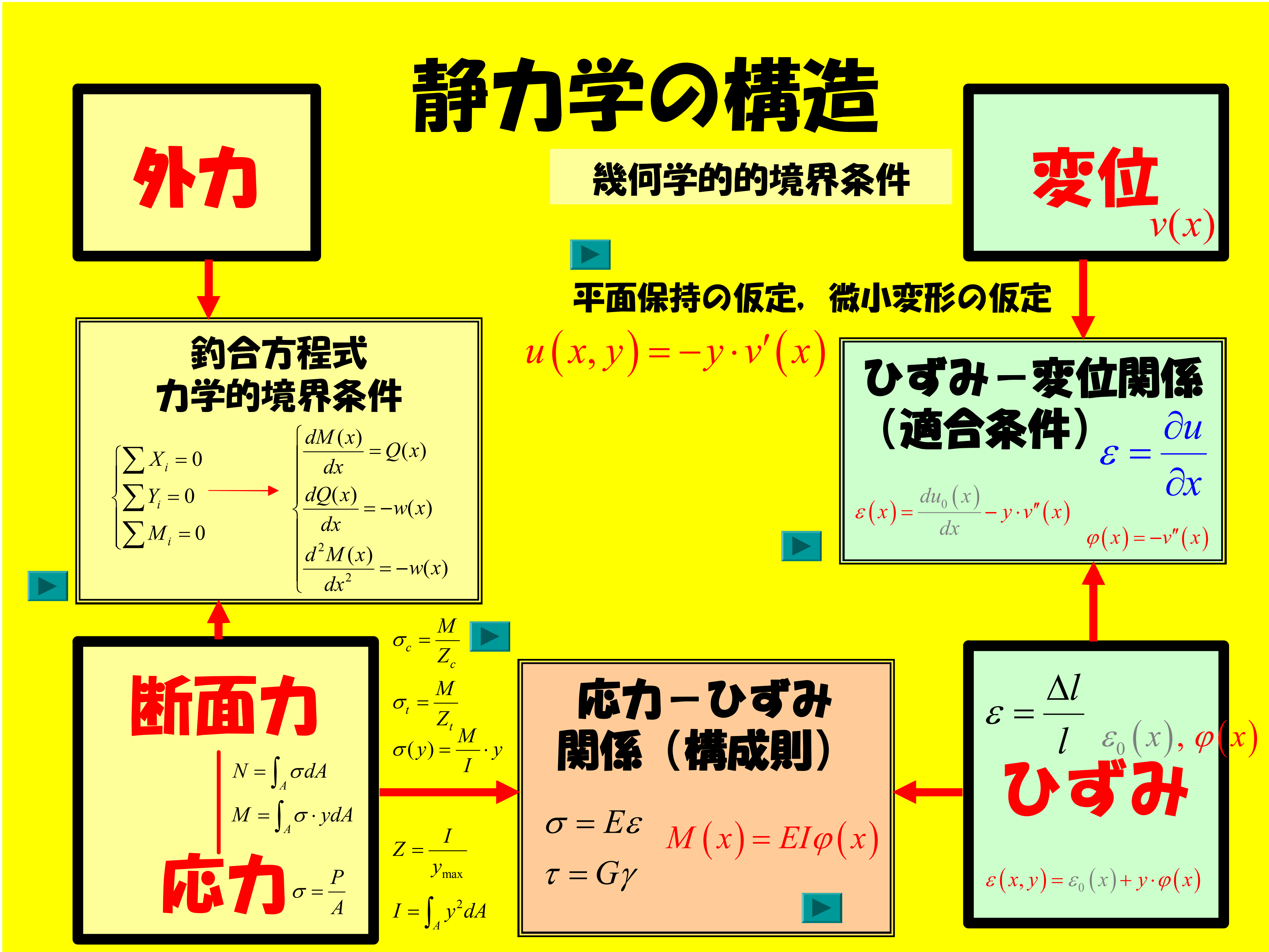
$$\varepsilon = y\frac{d\theta}{ds} = y\phi$$

符号

P’ (x, y)の点は材長方向に縮んでいる．$y \neq 0$ の点の伸び縮みを曲率ϕで表現するのである.

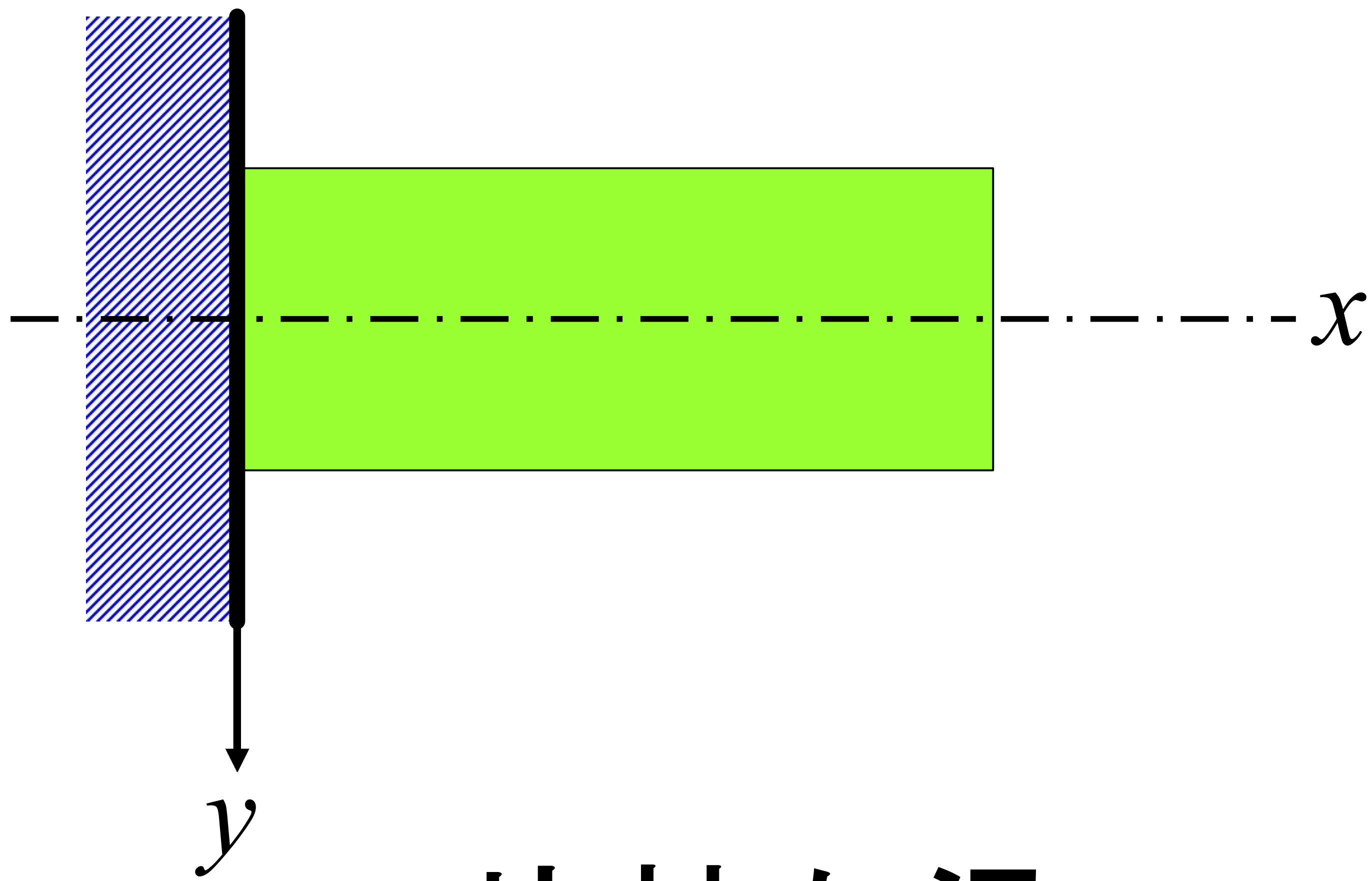
ひずみ2

４つの量の関係

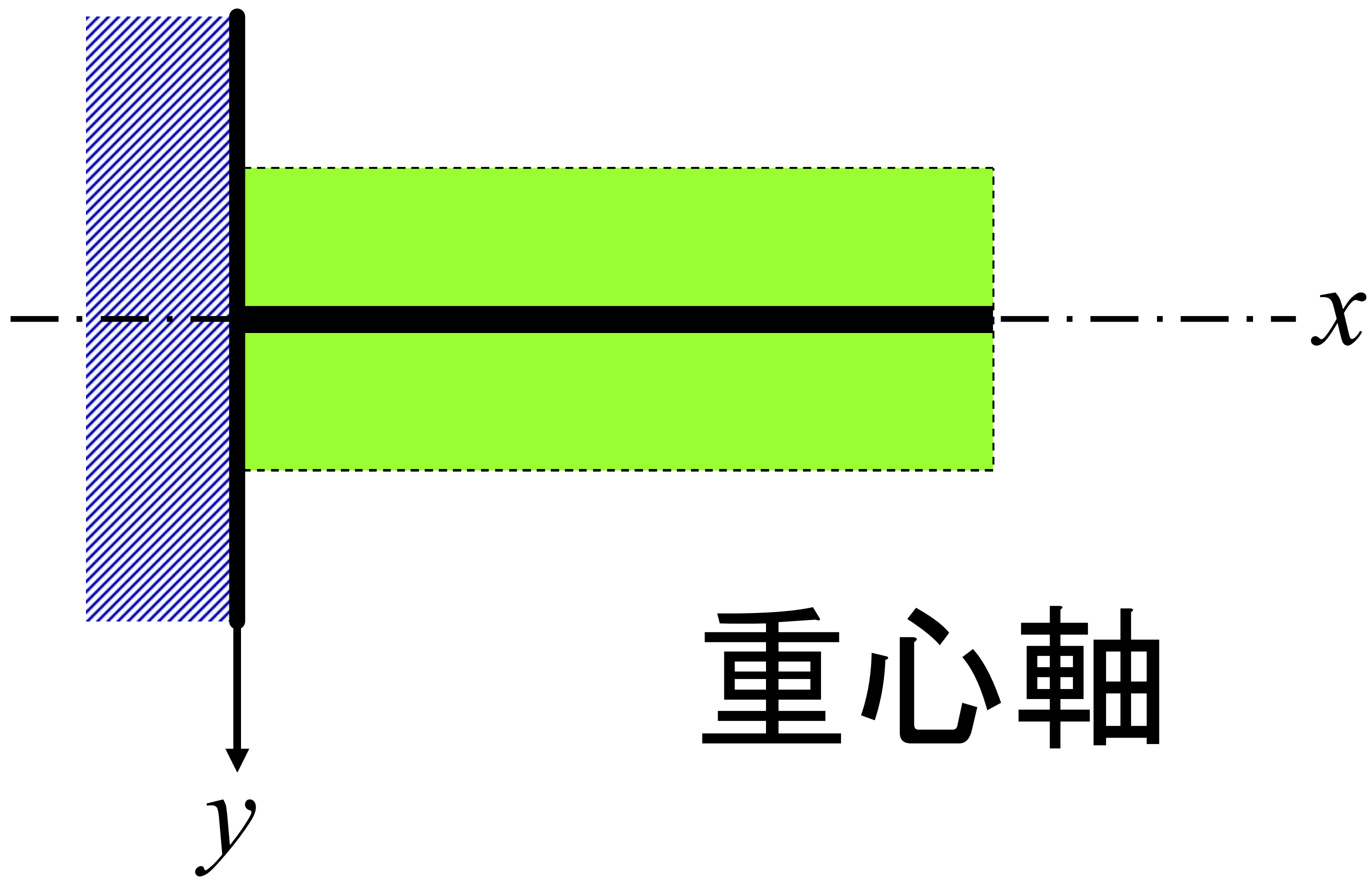

静力学の構造
外力
幾何学的的境界条件
変位 $v(x)$
平面保持の仮定，微小変形の仮定
$u(x,y)=-y\cdot v'(x)$
釣合方程式
力学的境界条件
$\sum X_i=0$, $\sum Y_i=0$, $\sum M_i=0$
$\frac{dM(x)}{dx}=Q(x)$
$\frac{dQ(x)}{dx}=-w(x)$
$\frac{d^2M(x)}{dx^2}=-w(x)$
ひずみ－変位関係
（適合条件）
$\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}$
$\varepsilon(x)=\frac{du_0(x)}{dx}-y\cdot v''(x)$
$\varphi(x)=-v''(x)$
断面力
$N=\int_A \sigma dA$
$M=\int_A \sigma\cdot y dA$
応力 $\sigma=\frac{P}{A}$
$\sigma_c=\frac{M}{Z_c}$
$\sigma_t=\frac{M}{Z_t}$
$\sigma(y)=\frac{M}{I}\cdot y$
$Z=\frac{I}{y_{\max}}$
$I=\int_A y^2 dA$
応力－ひずみ
関係（構成則）
$\sigma=E\varepsilon$
$\tau=G\gamma$
$M(x)=EI\varphi(x)$
$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}$
$\varepsilon_0(x),\ \varphi(x)$
ひずみ
$\varepsilon(x,y)=\varepsilon_0(x)+y\cdot\varphi(x)$

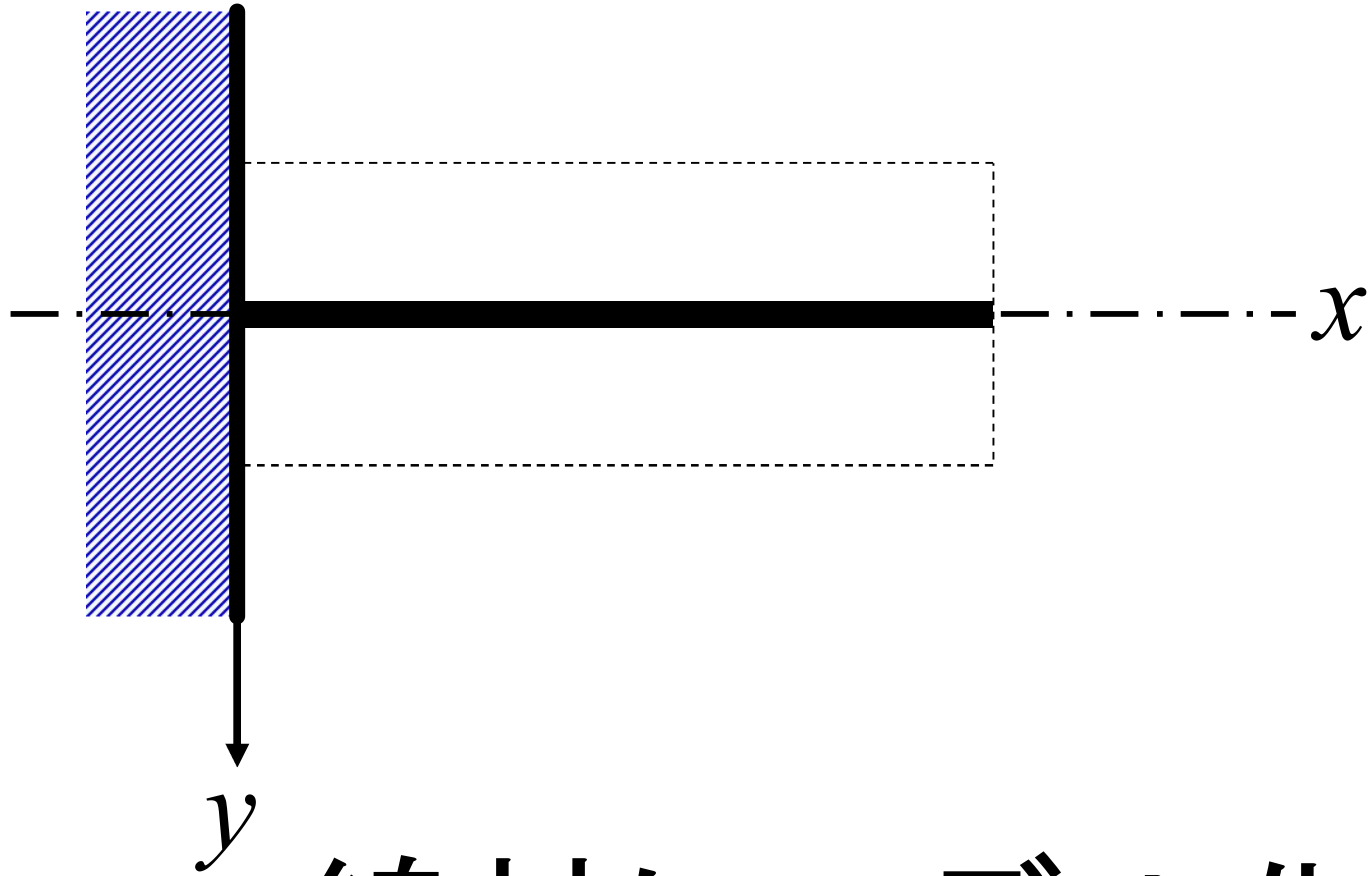
平面保持の仮定

p.131

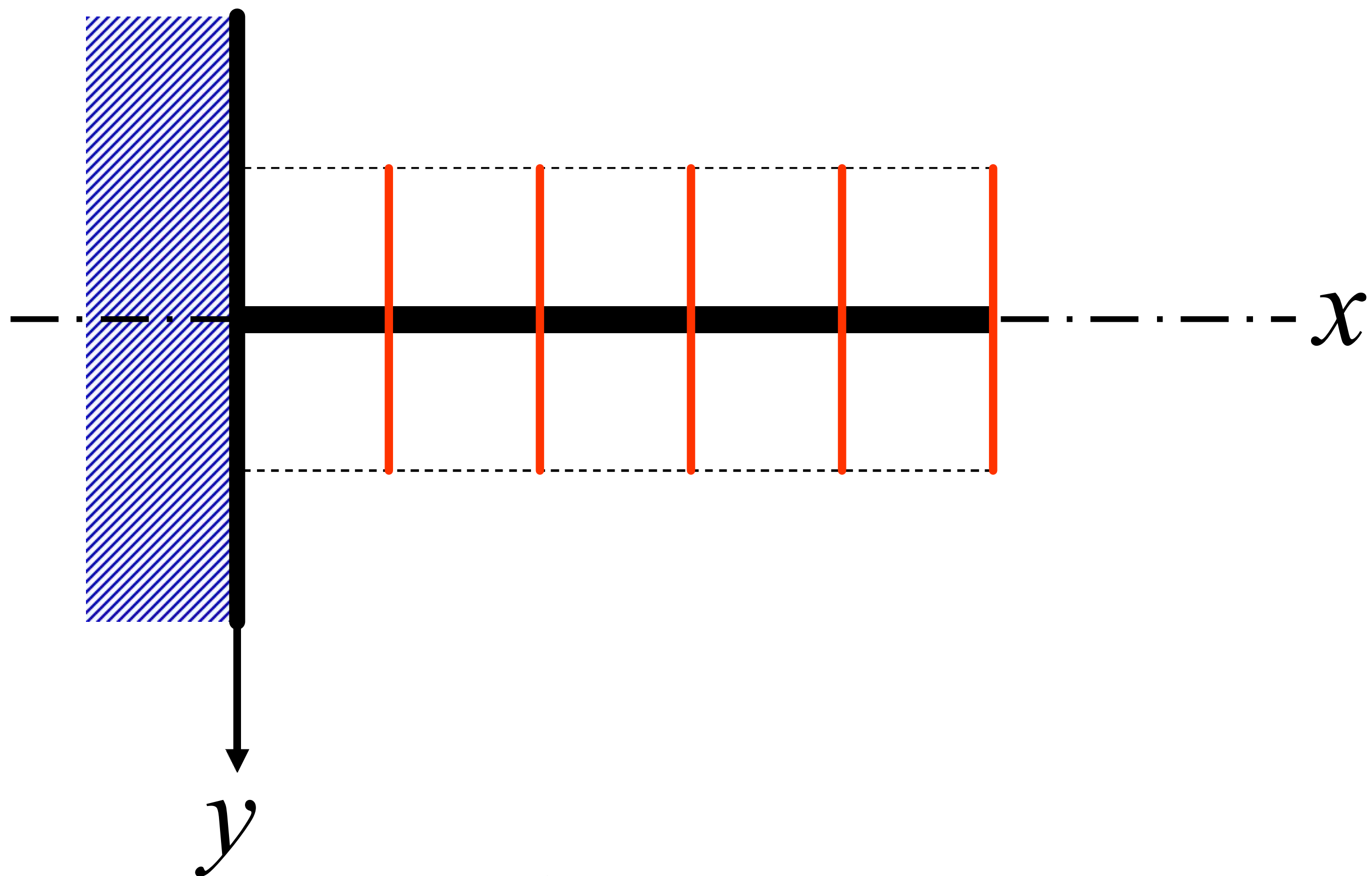


片持ち梁

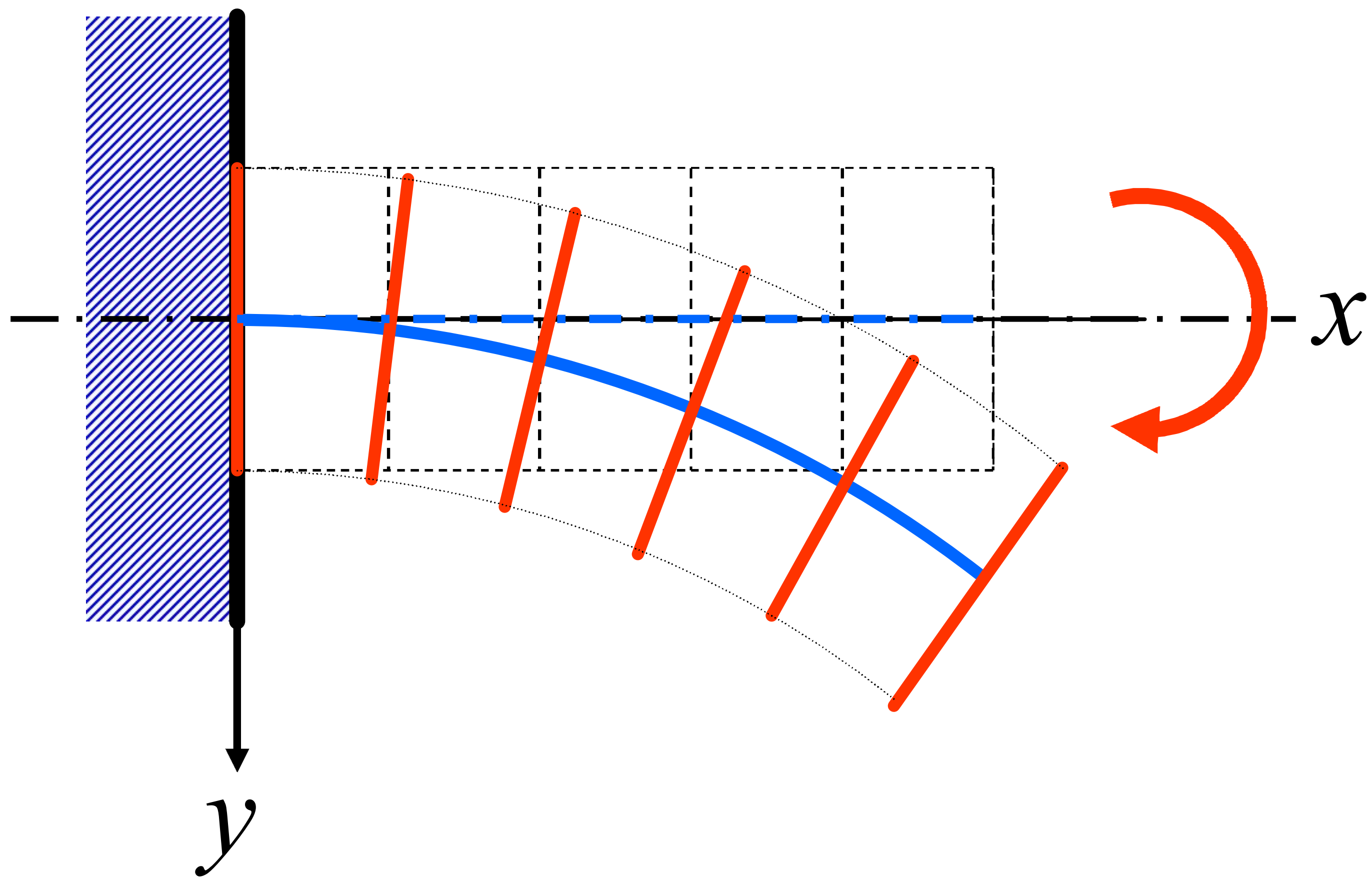

x
y
重心軸



線材にモデル化

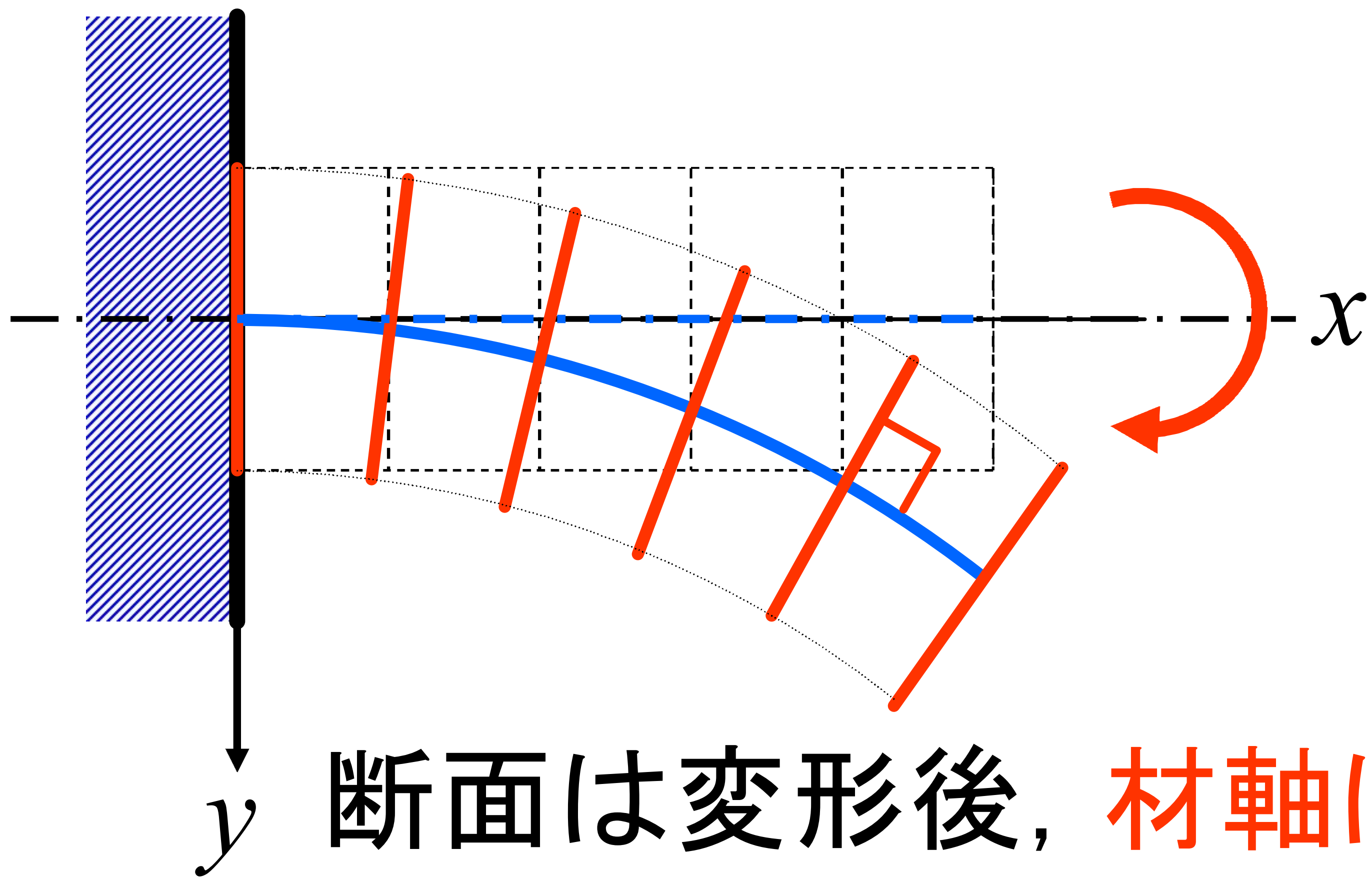


いくつかの断面

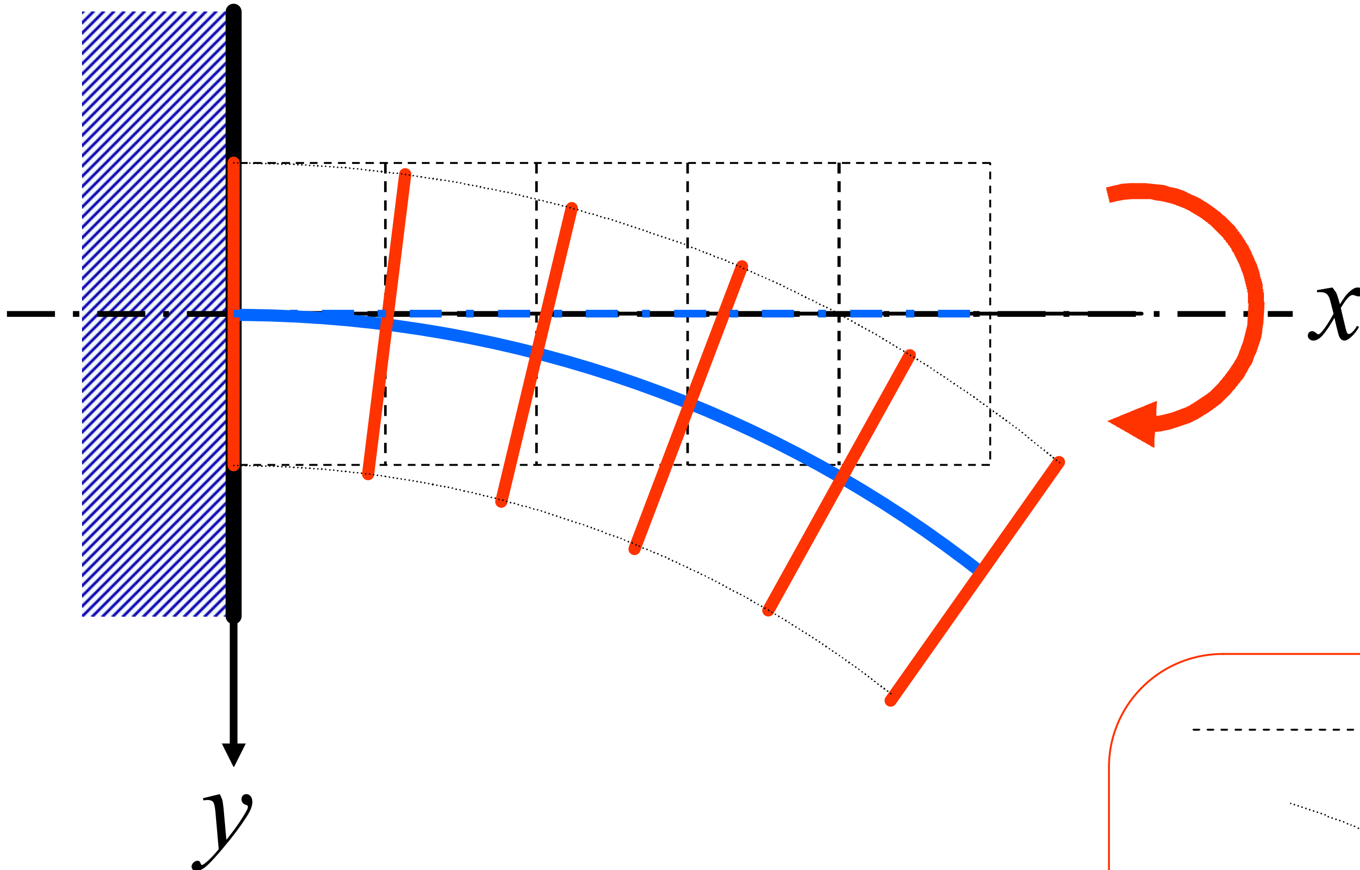


曲がった形状

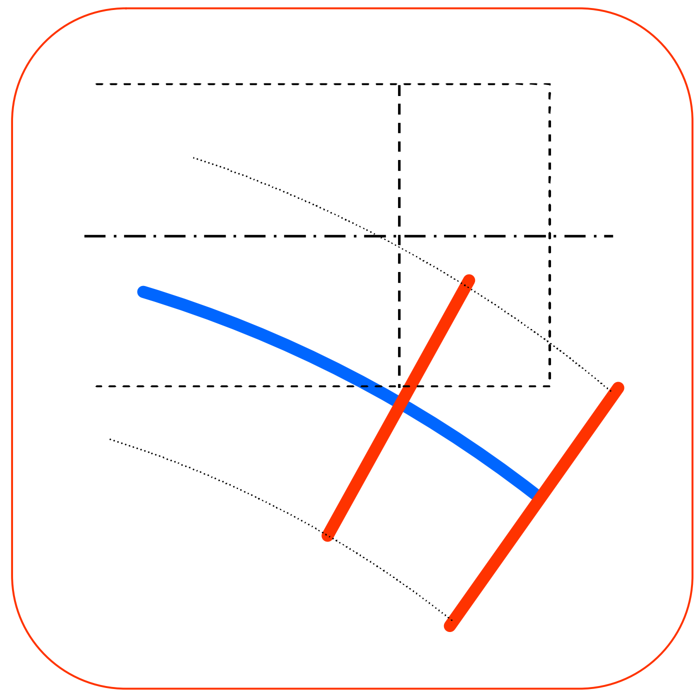
平面保持の仮定

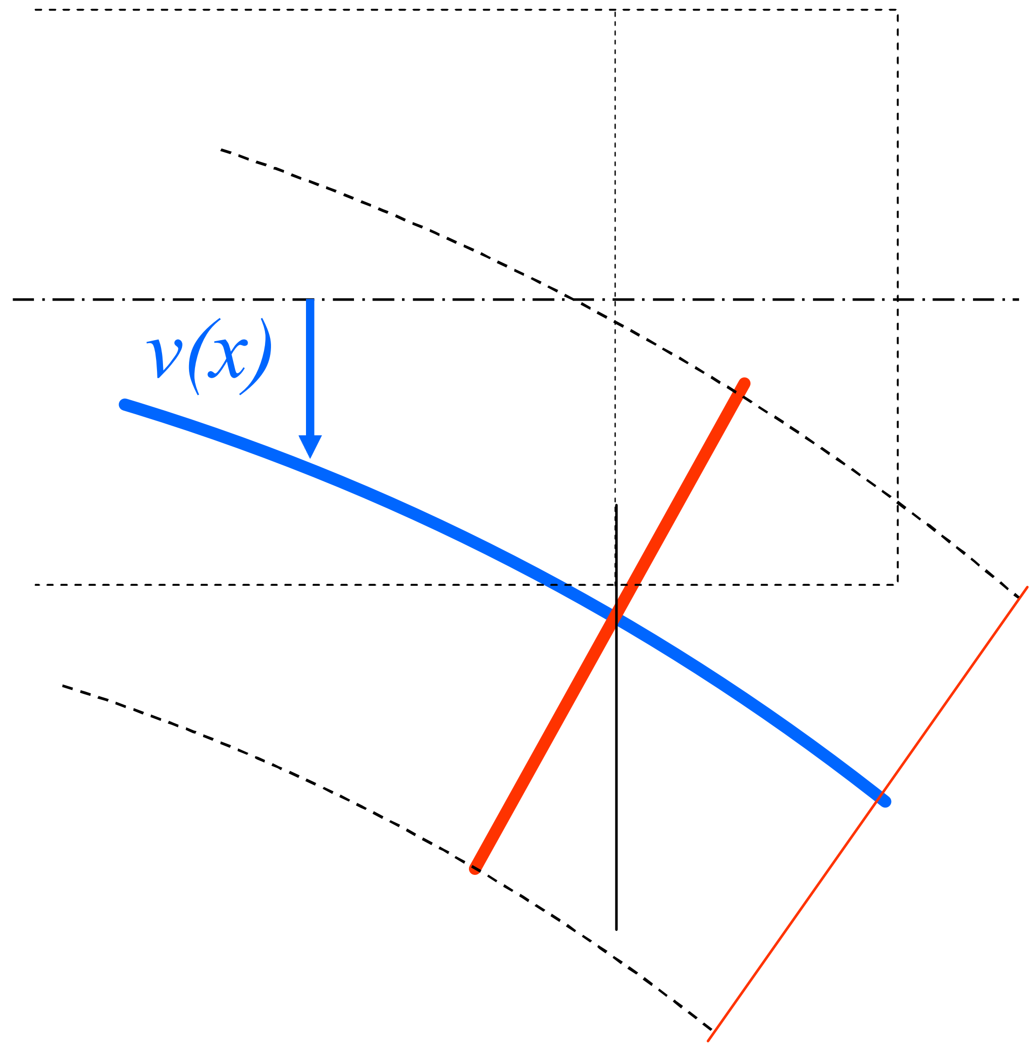


断面は変形後，材軸に直交する全く同じ平面に移る．

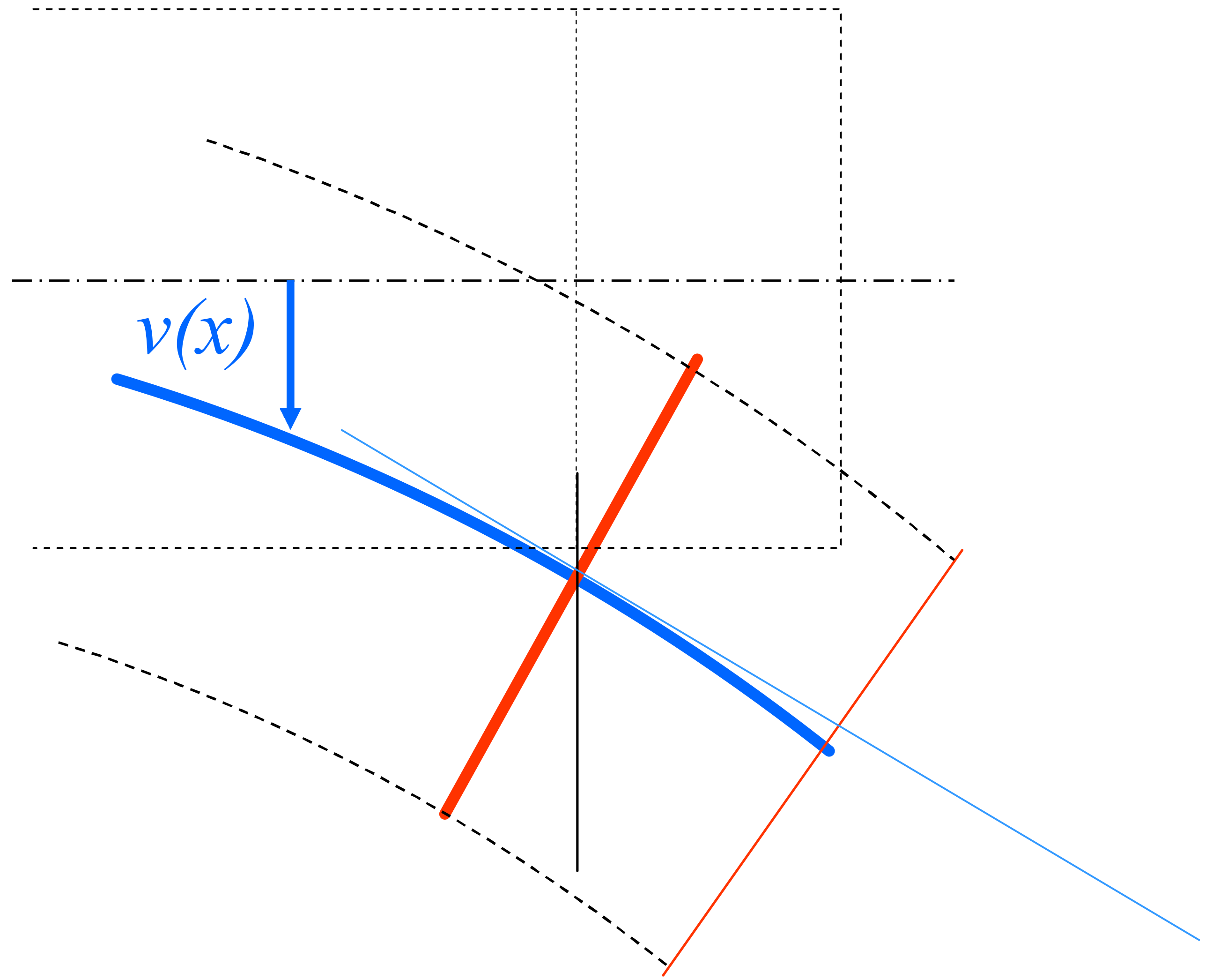


2つの断面

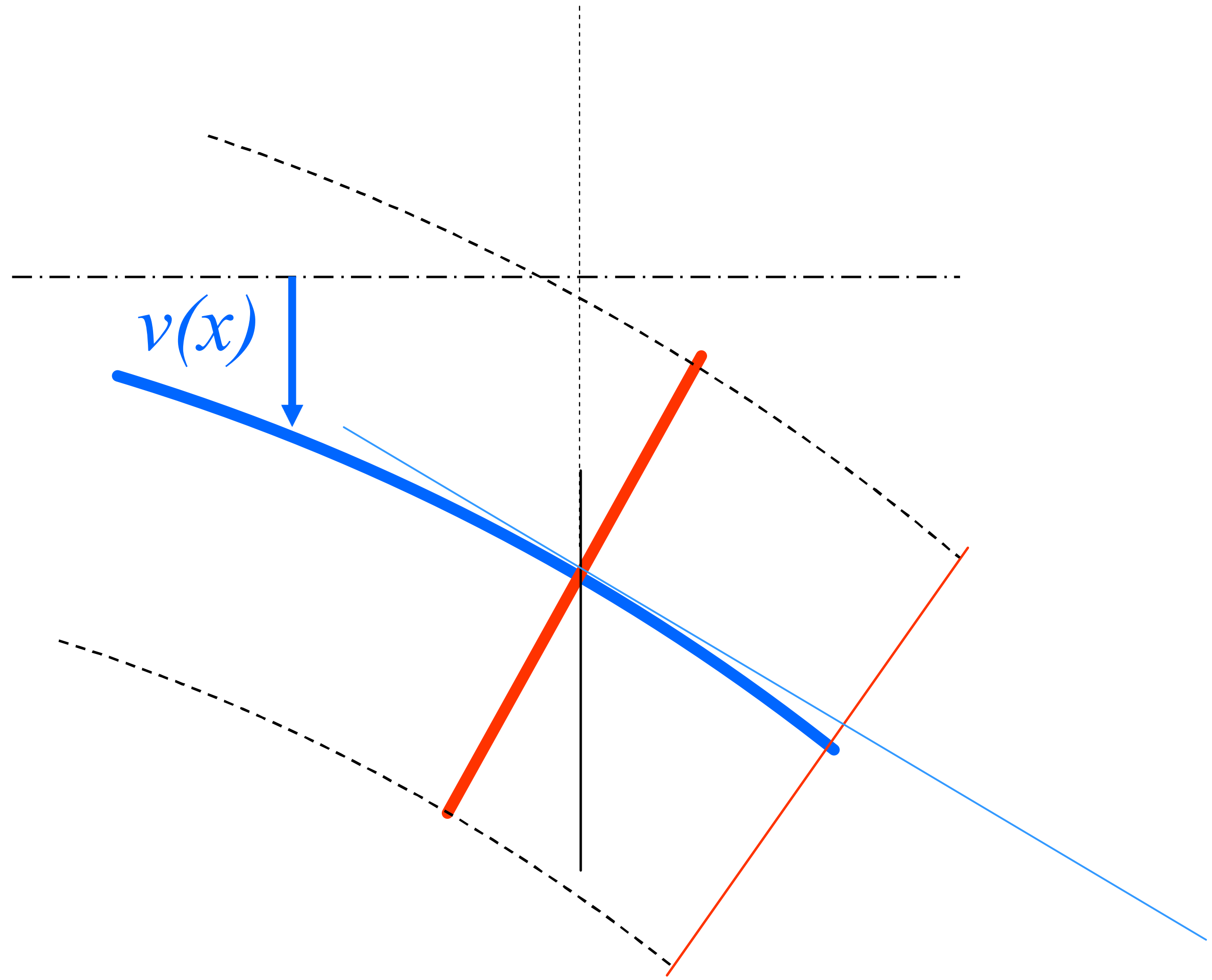




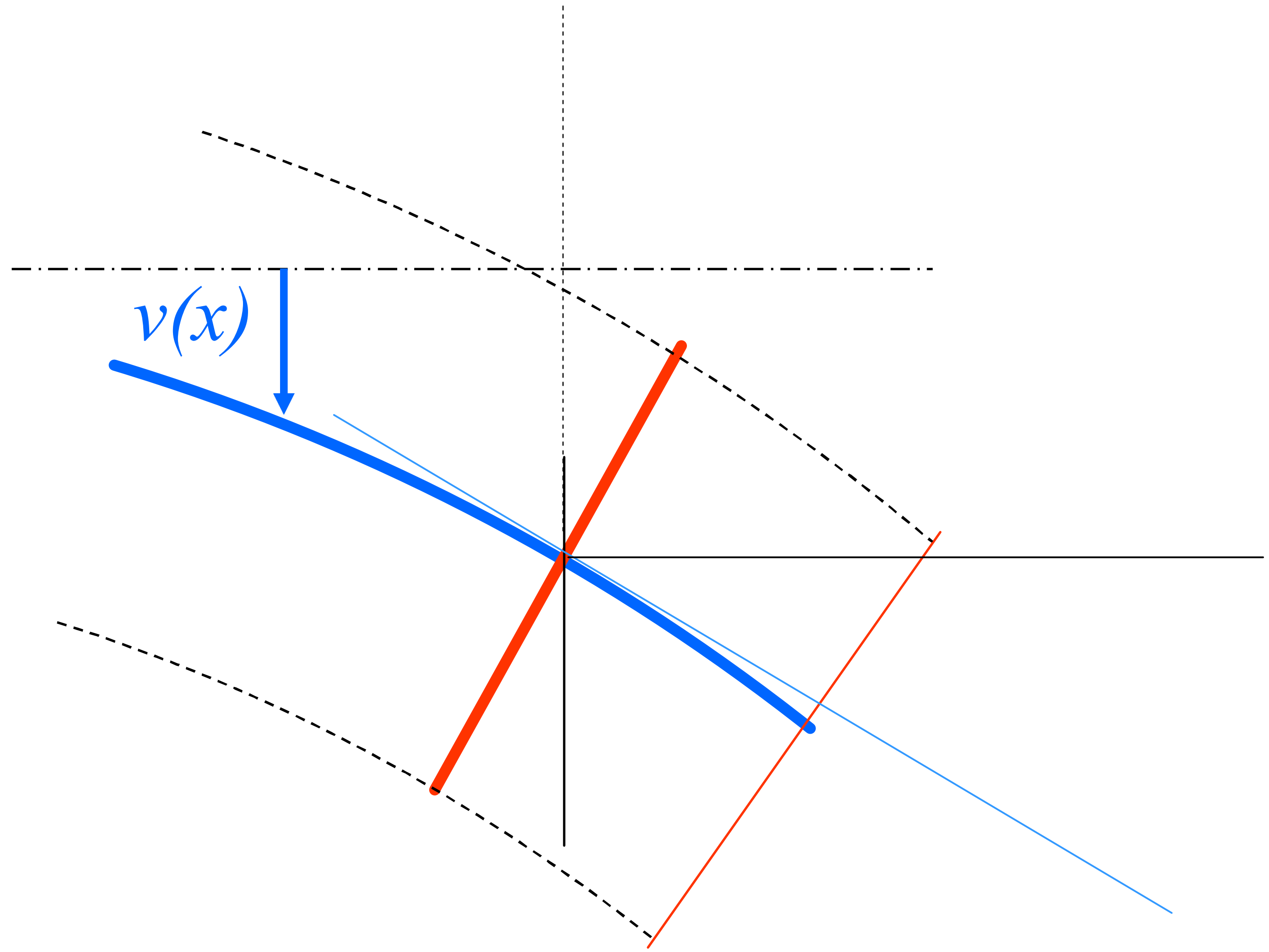
1つの断面の拡大図



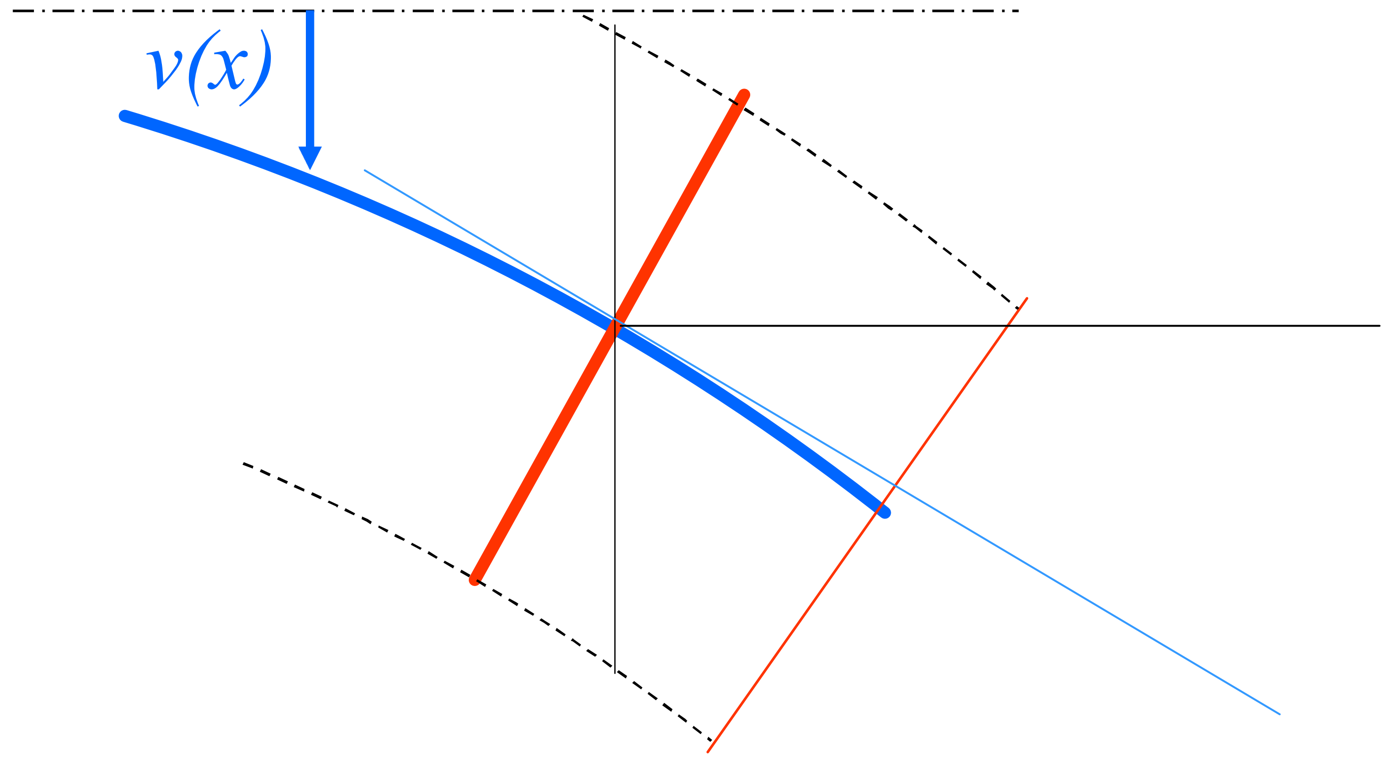
たわみ曲線の接線



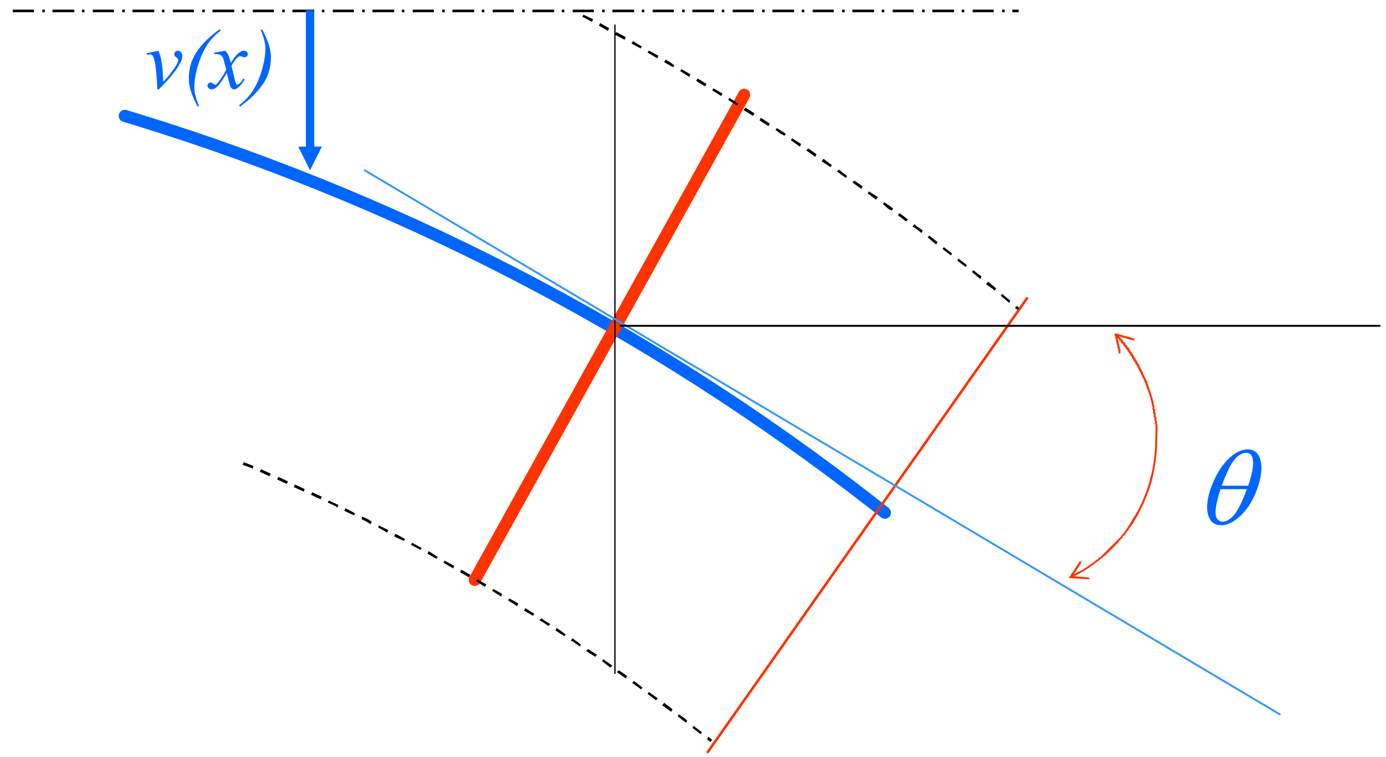
たわみ曲線の接線



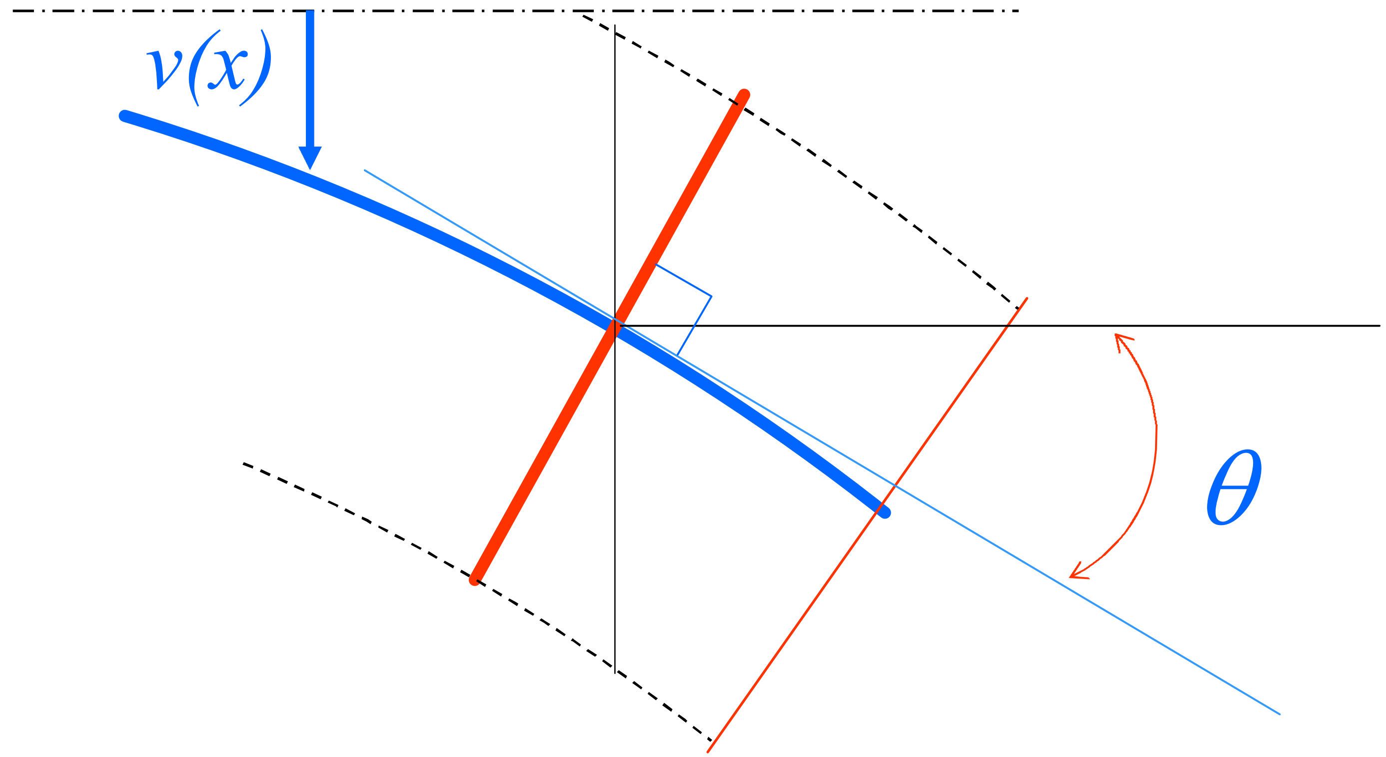
たわみ曲線の接線



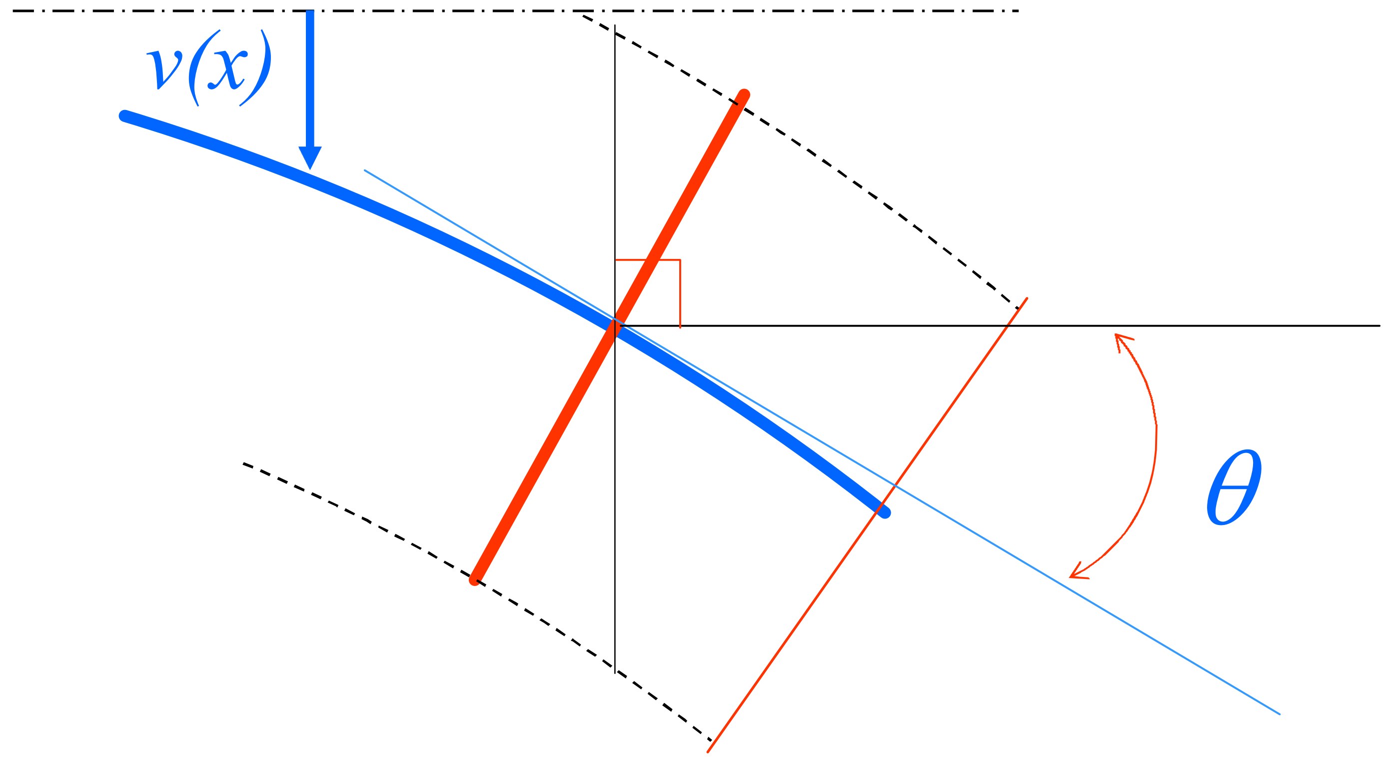
たわみ曲線の接線



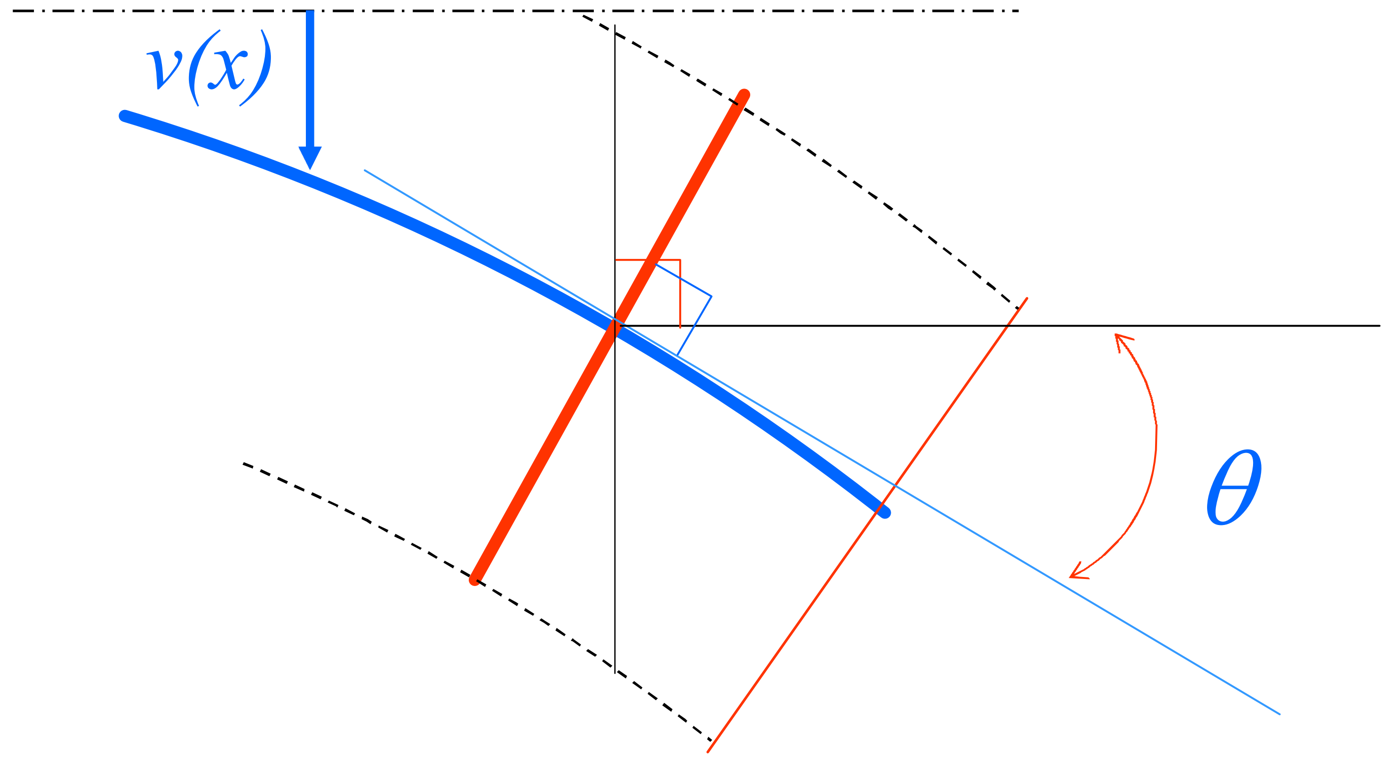
たわみ角θ

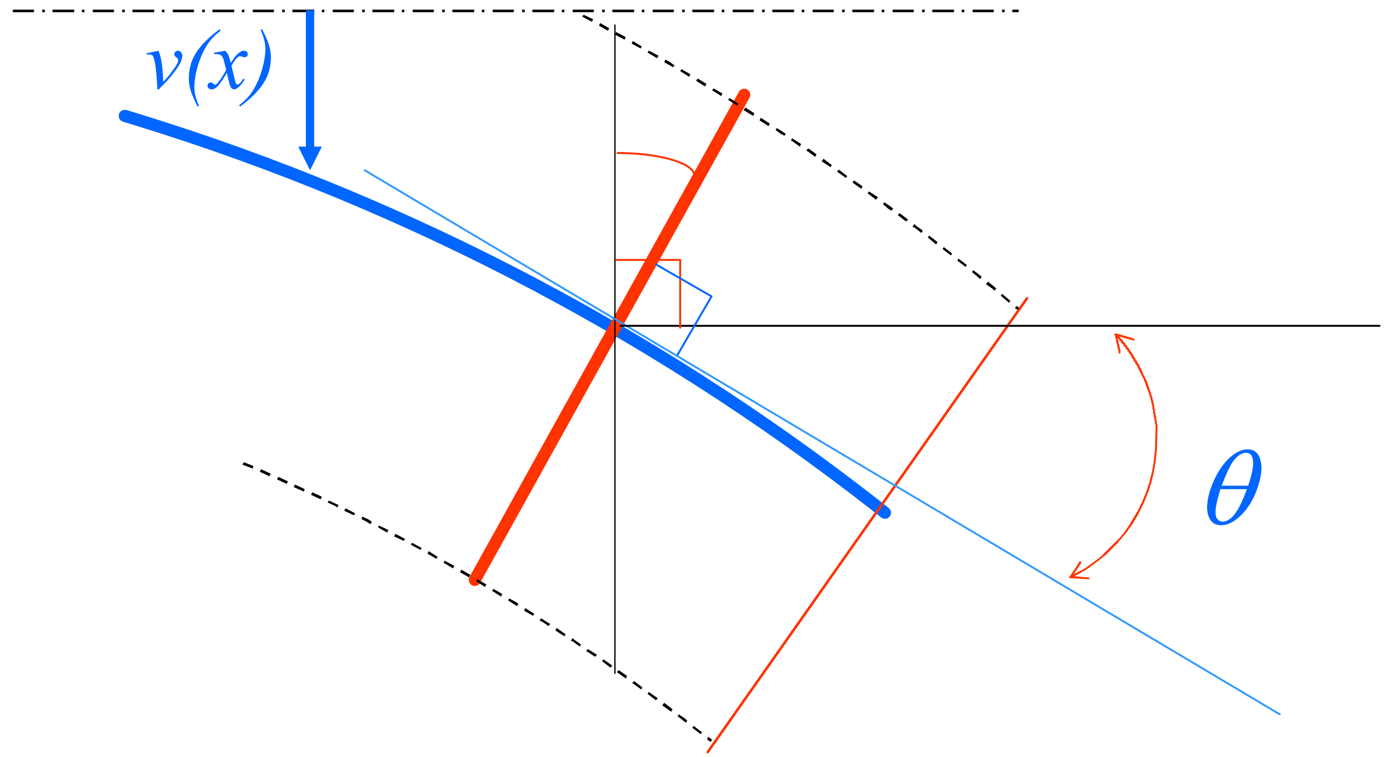


変形後の断面は材軸に直交

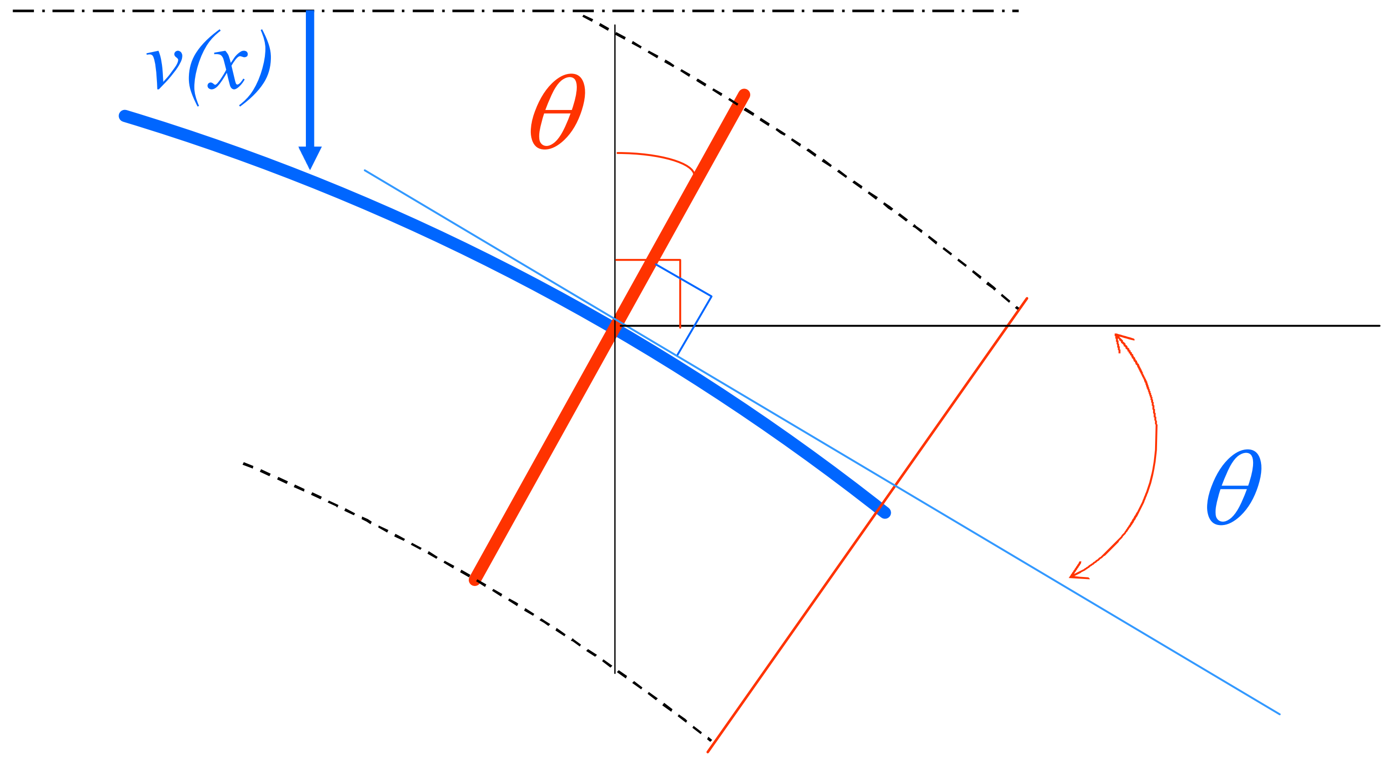


水平軸と垂直軸

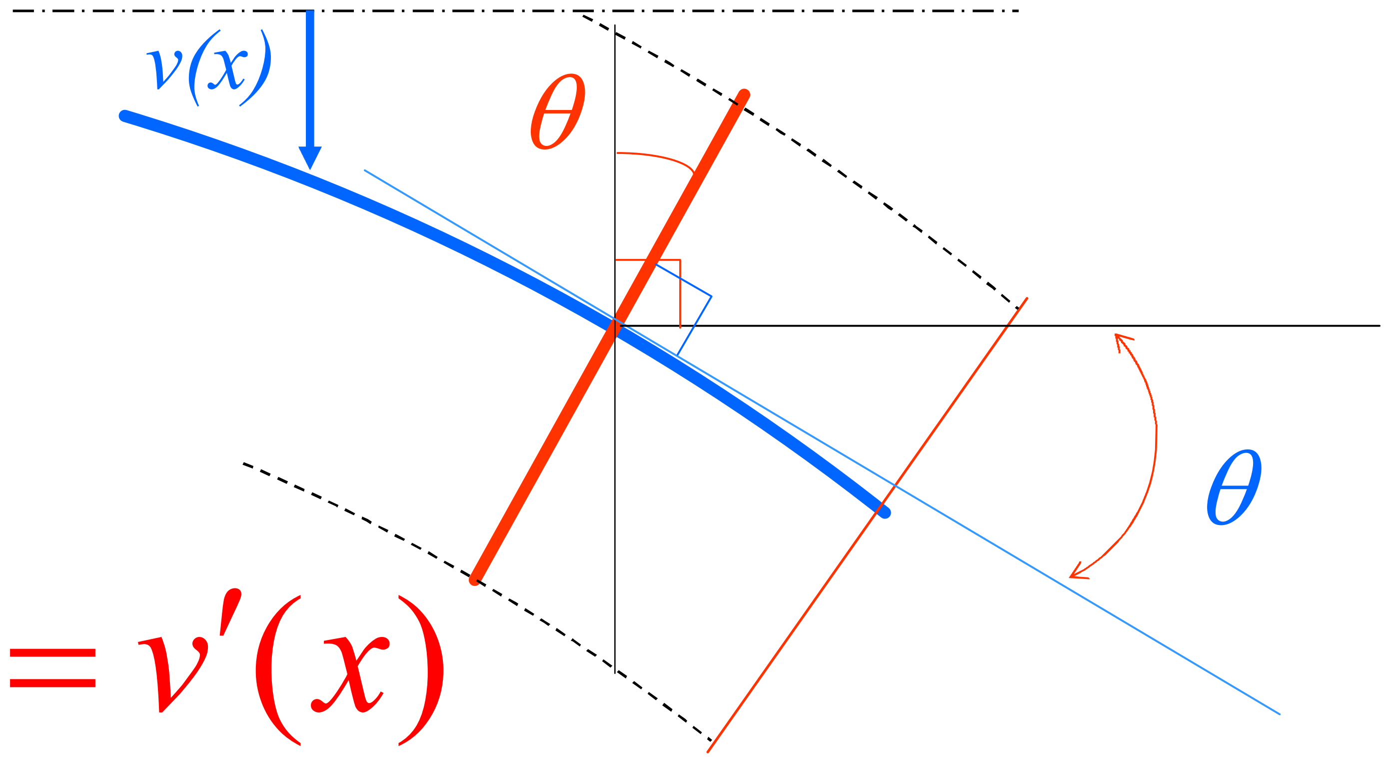

$v(x)$
θ



v(x)
θ

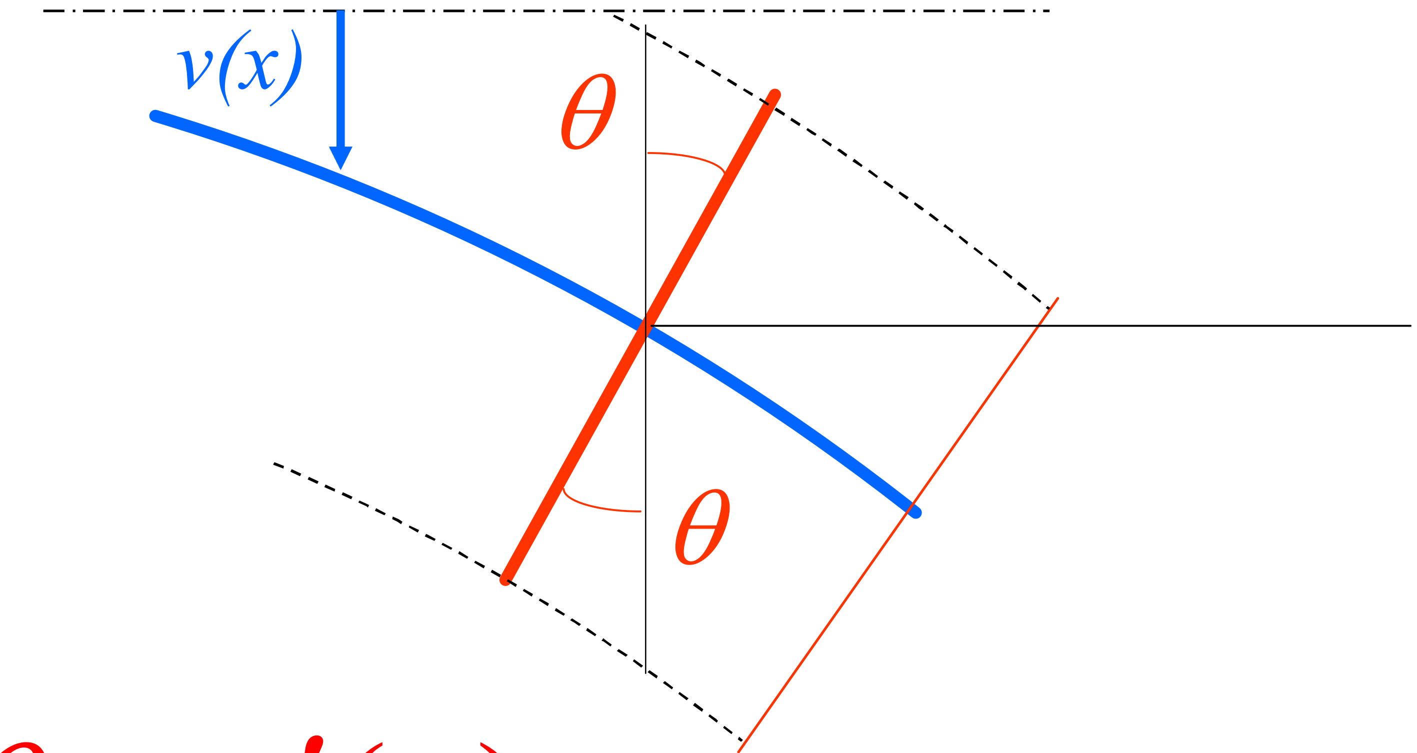


変形後の断面と鉛直軸の角度

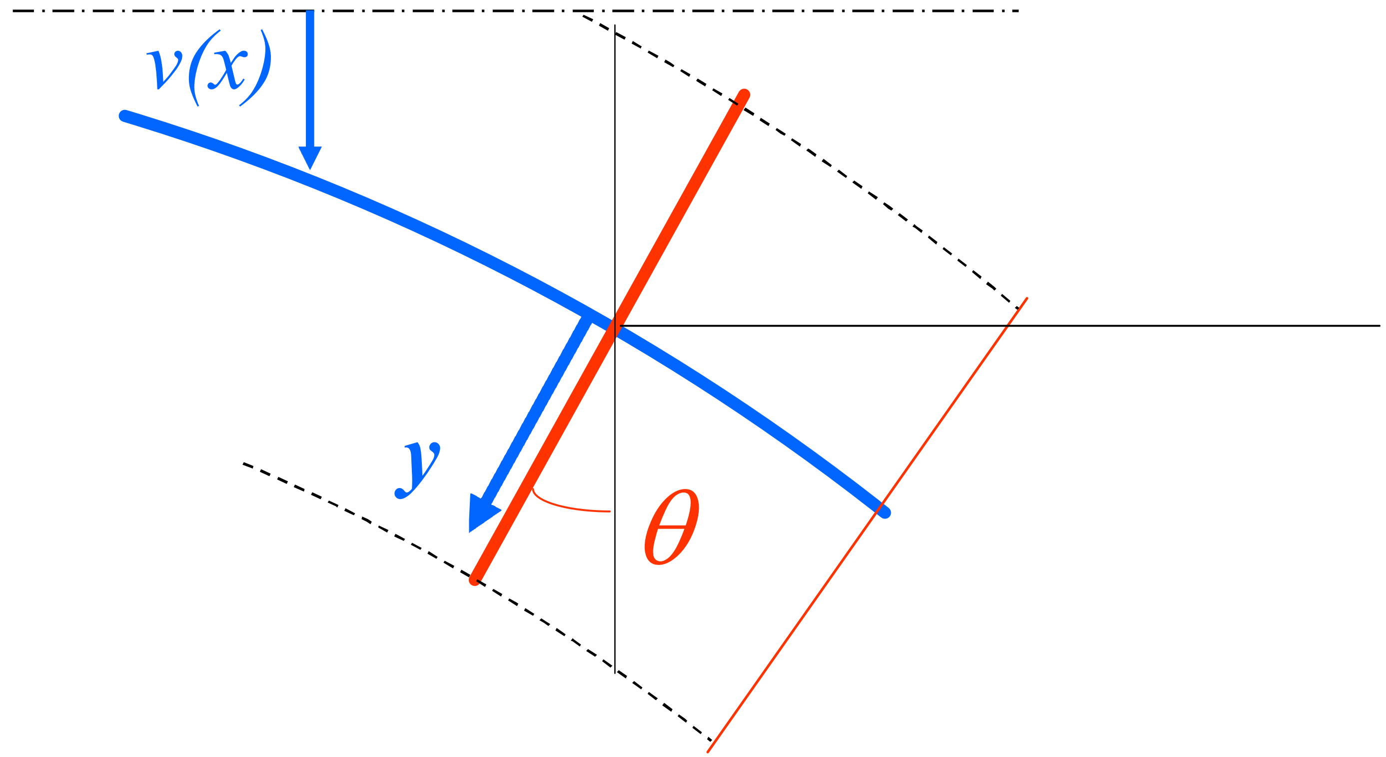


$$\tan\theta = v'(x)$$

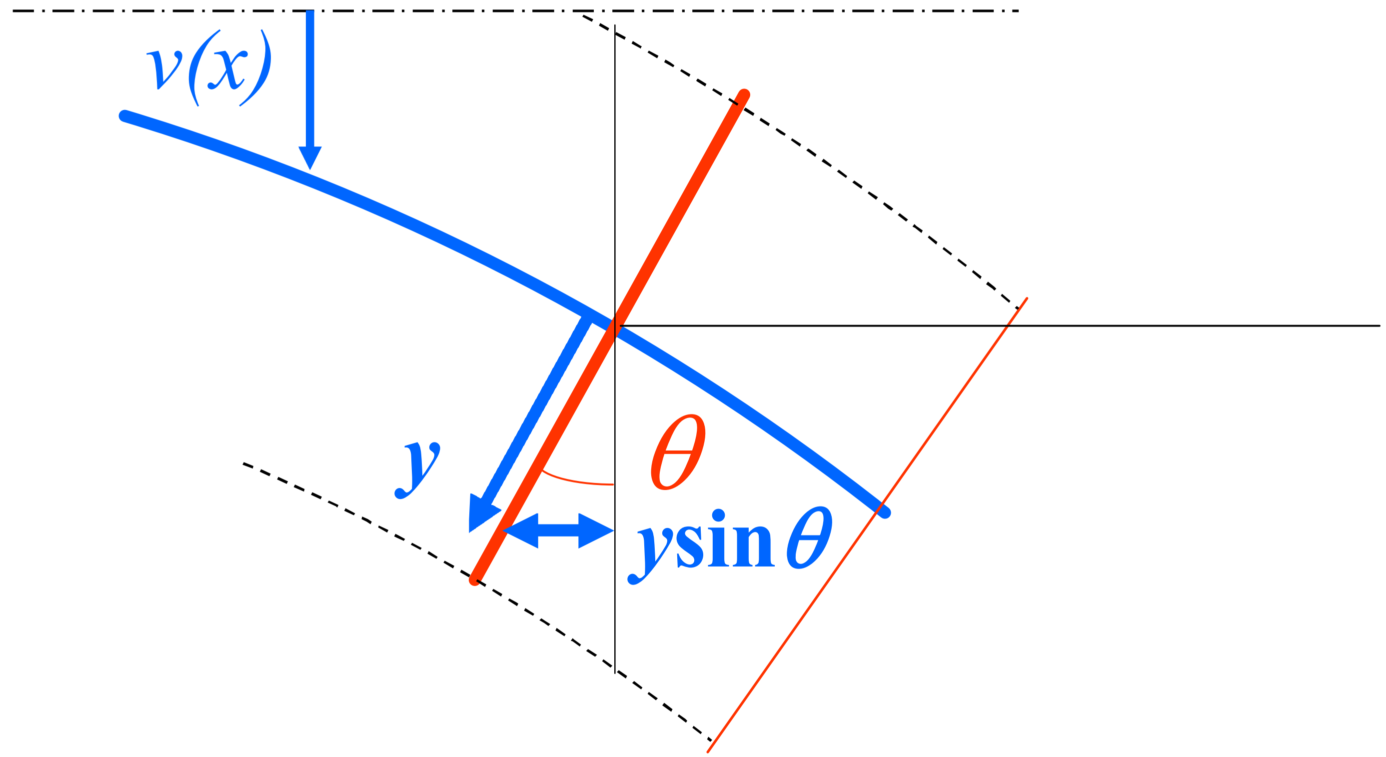
たわみ角θとたわみvの関係



$$\tan\theta = v'(x)$$

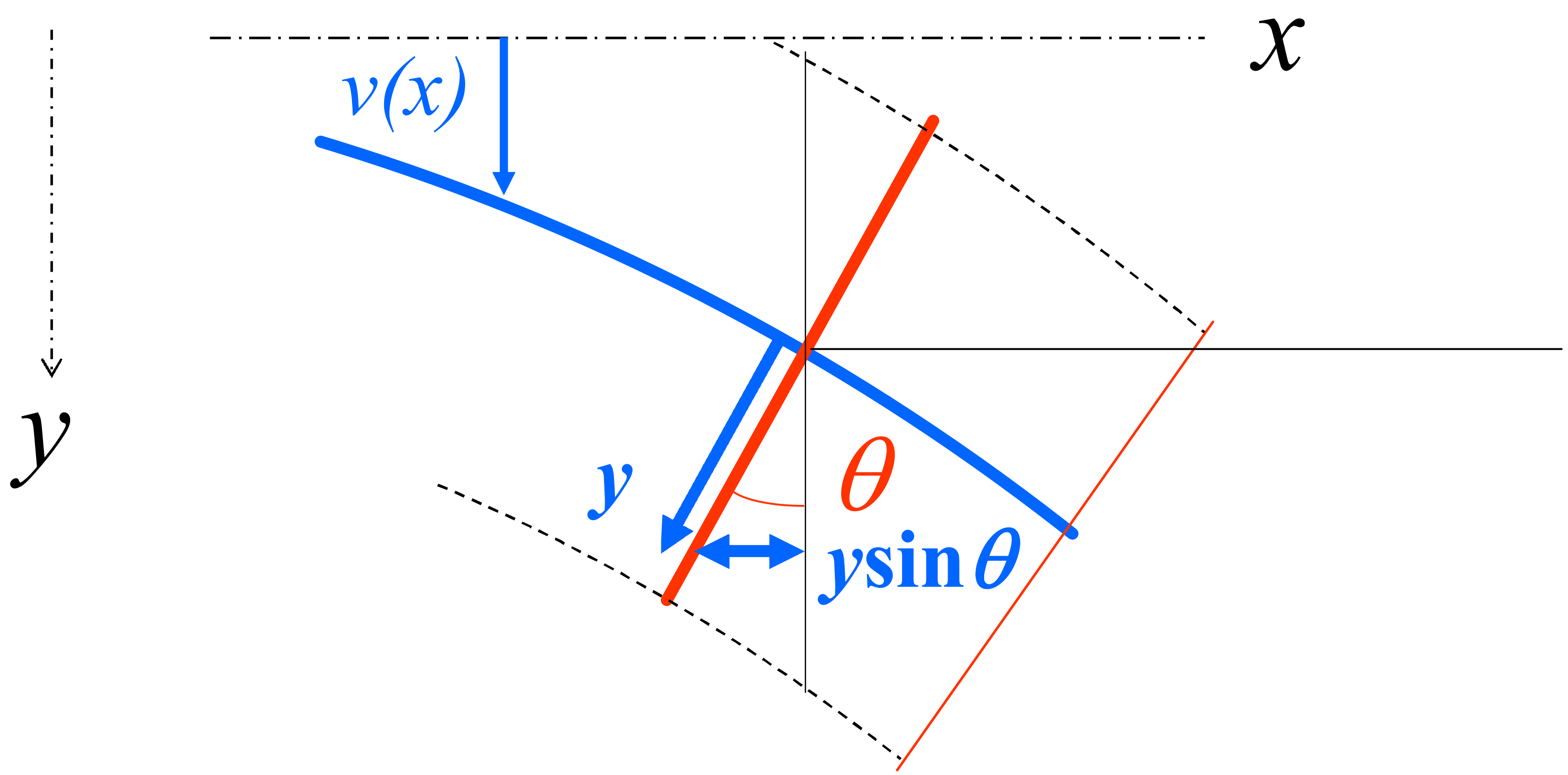


変形後のy位置の点



水平方向への移動量

$$y\sin\theta \approx y\theta \approx y\tan\theta = yv'(x)$$



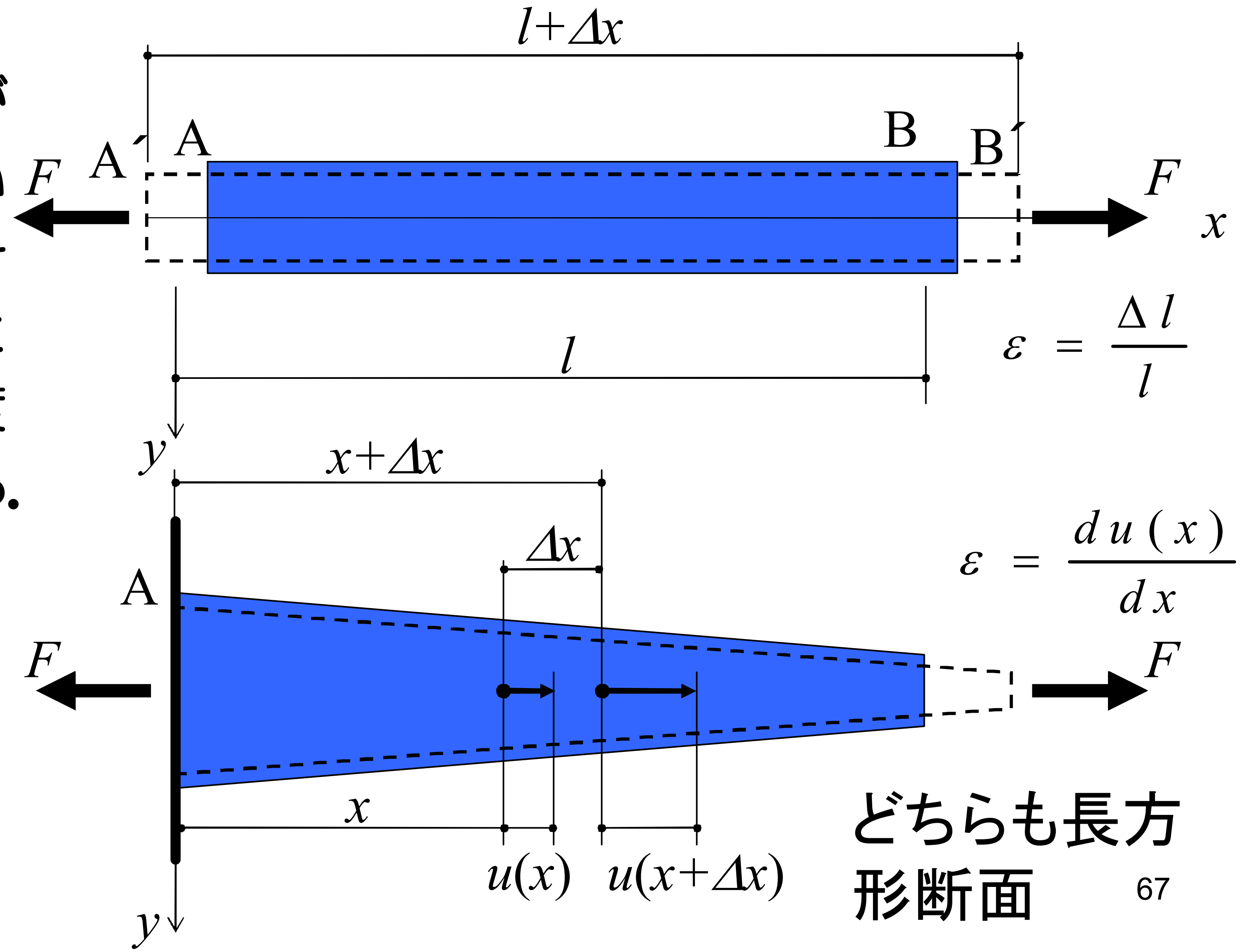
重心軸のy方向変位を$v(x)$とすると，重心からyだけ離れた点のx方向の変位は，$y\,v'(x)$となる．

ひずみ－変位関係

p.132

変断面材の伸び

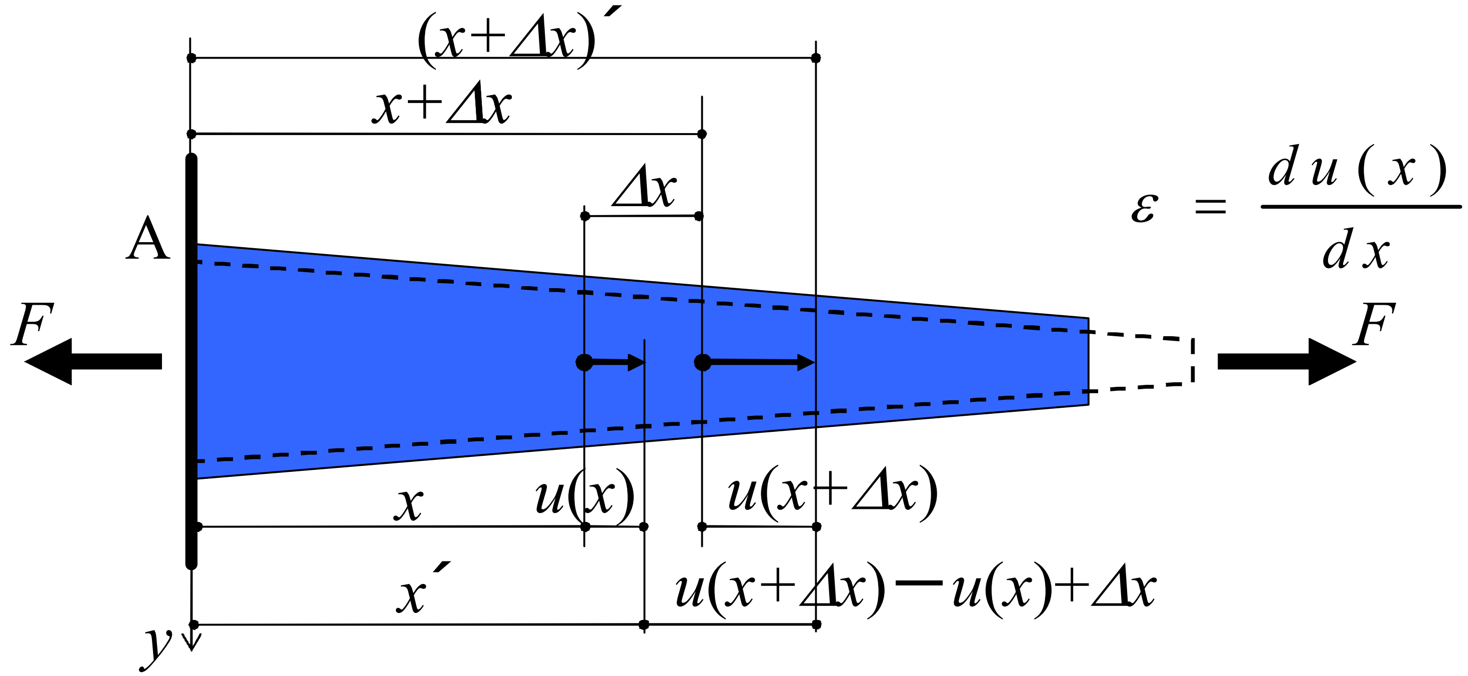
棒の伸びが一様でないときは，その部分ごとのひずみ度を定義する.



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\varepsilon = \frac{du(x)}{dx}$$

どちらも長方形断面



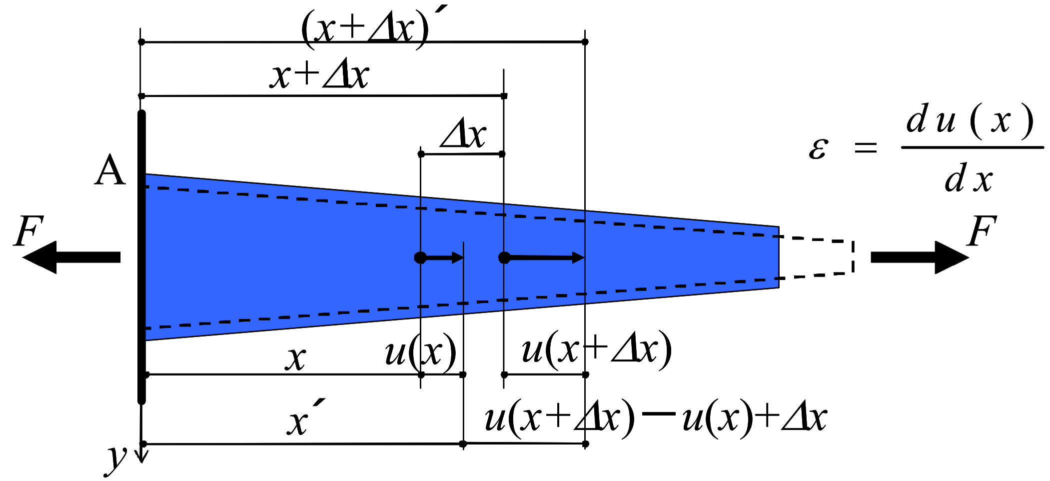
Aから***x***離れていた点は***x***´に，**A**から**(*x*+Δ*x*)**離れていた点は**(*x*+Δ*x*)**´に移動したとする.このとき，点***x***の変位***u*(*x*)**は,

$$u(x) = x' - x$$

同様に点**(*x*+Δ*x*)**の変位は

$$u(x+\Delta x) = (x+\Delta x)' - (x+\Delta x)$$

変形前Δx離れていた２つの点$x, x+\Delta x$は，変形後は，



$$(x+\Delta x)'-x'=\left(u(x+\Delta x)+(x+\Delta x)\right)-\left(u(x)+x\right)$$

$$=u(x+\Delta x)-u(x)+\Delta x$$

離れていることになる.

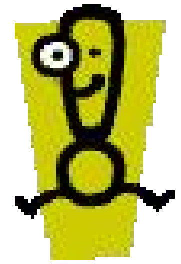
変形量を元の長さで除してひずみ度を求めると，

$$\Delta l=\left(u(x+\Delta x)-u(x)+\Delta x\right)-\Delta x$$

$$l=\Delta x$$

$$\varepsilon=\left(u(x+\Delta x)-u(x)\right)/\Delta x$$

ひずみと変位の関係式



大事

$$\varepsilon = \left(u(x+\Delta x) - u(x) \right) / \Delta x$$

$\Delta x \to 0$とすると

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{x \to 0} \frac{\left(u(x+\Delta x) - u(x) \right)}{\Delta x} = \frac{du(x)}{dx}}$$

変位を微分するとひずみが得られる！

平面保持の仮定より，x方向変位は下式となった.

$$u(x,y) = y\sin\theta \approx y\theta \approx y\tan\theta = yv'(x)$$

したがって，ひずみは

$$\boxed{\varepsilon = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d\left(-yv'(x)\right)}{dx} = -y \cdot v''(x)}$$

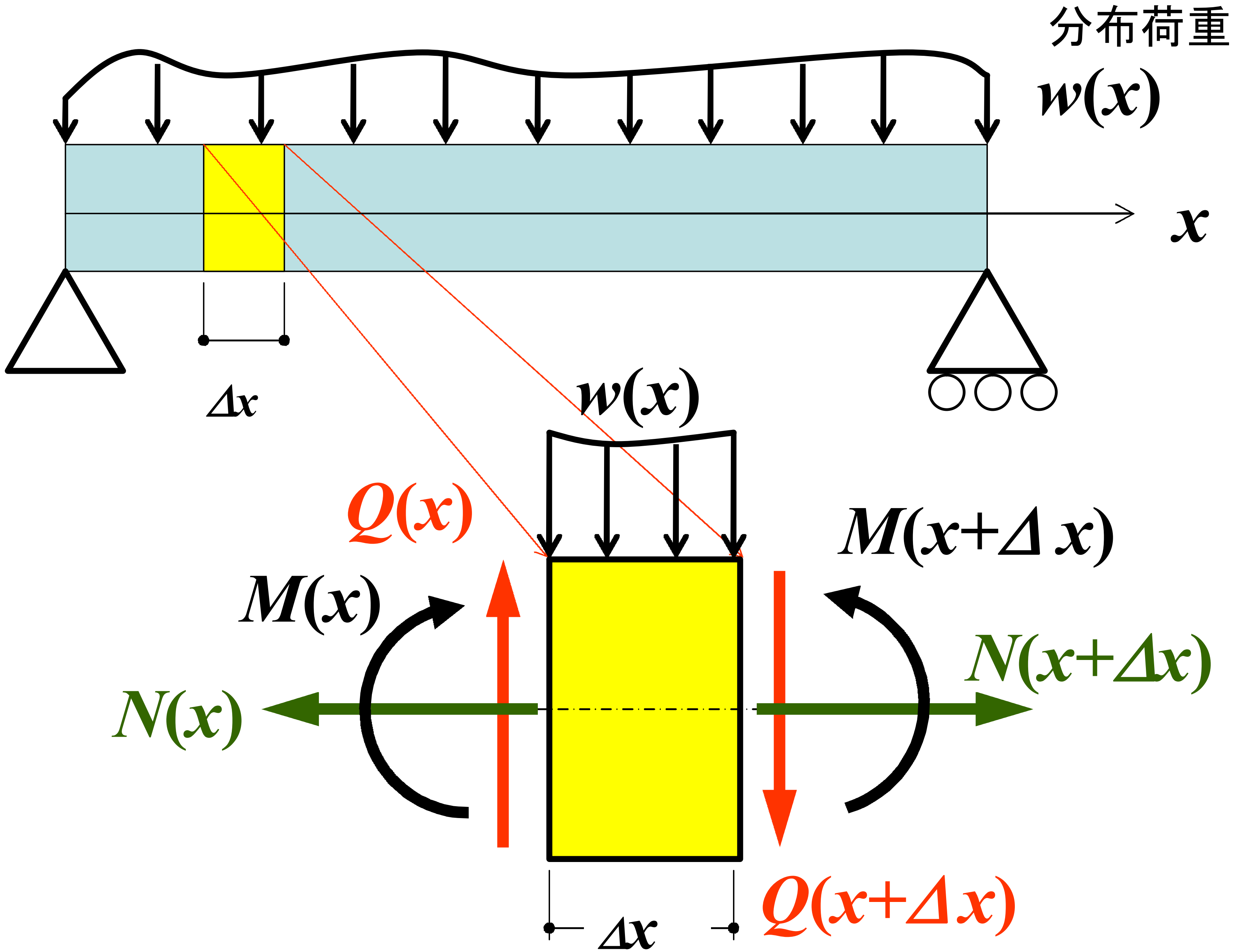
$$\boxed{\varepsilon(x,y) = -y \cdot v''(x)}$$

テキストp．134～135の説明にあるように，曲率ϕをひずみとして，下式の関係がある．

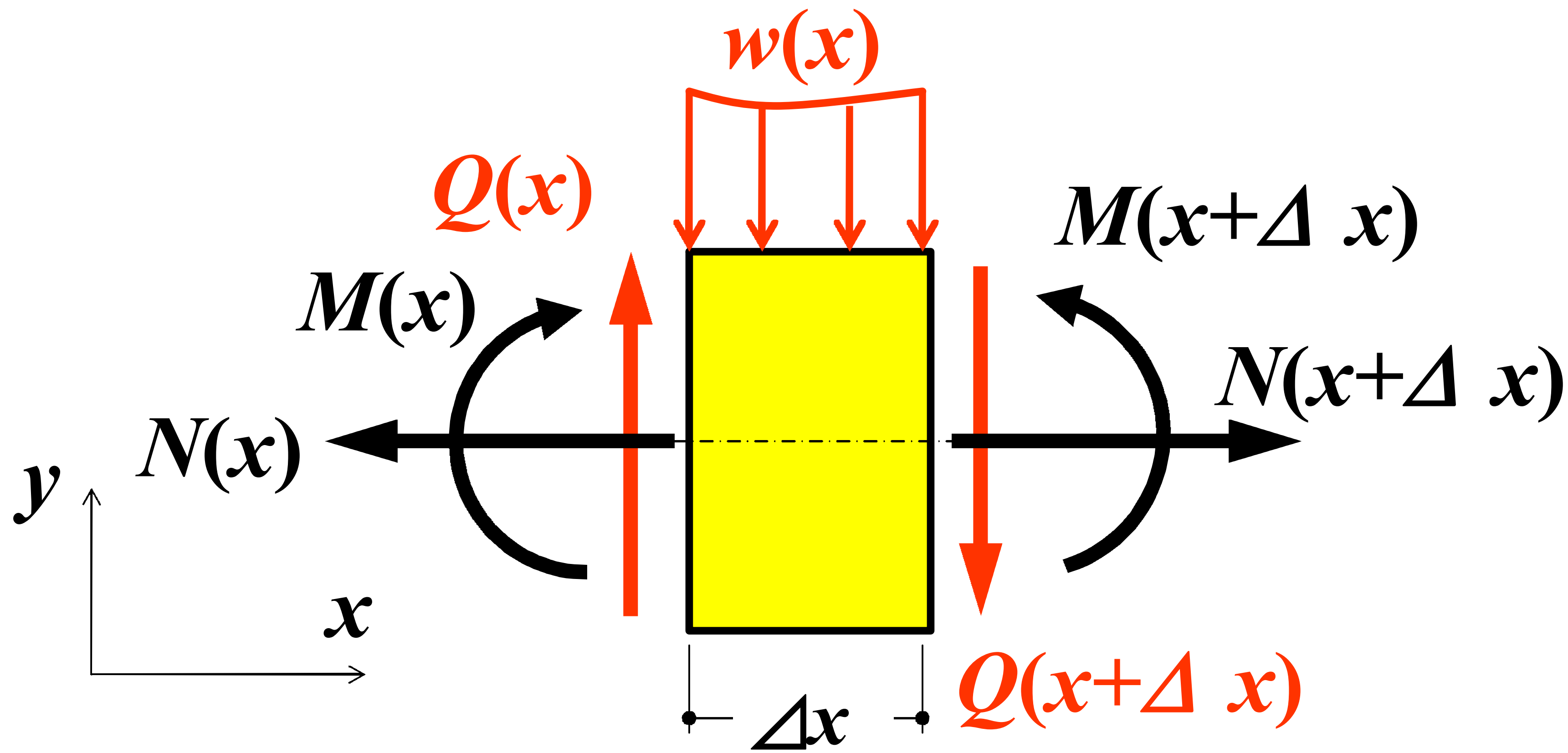
$$\boxed{\phi(x) = -v''(x)}$$

力の釣合

p.68



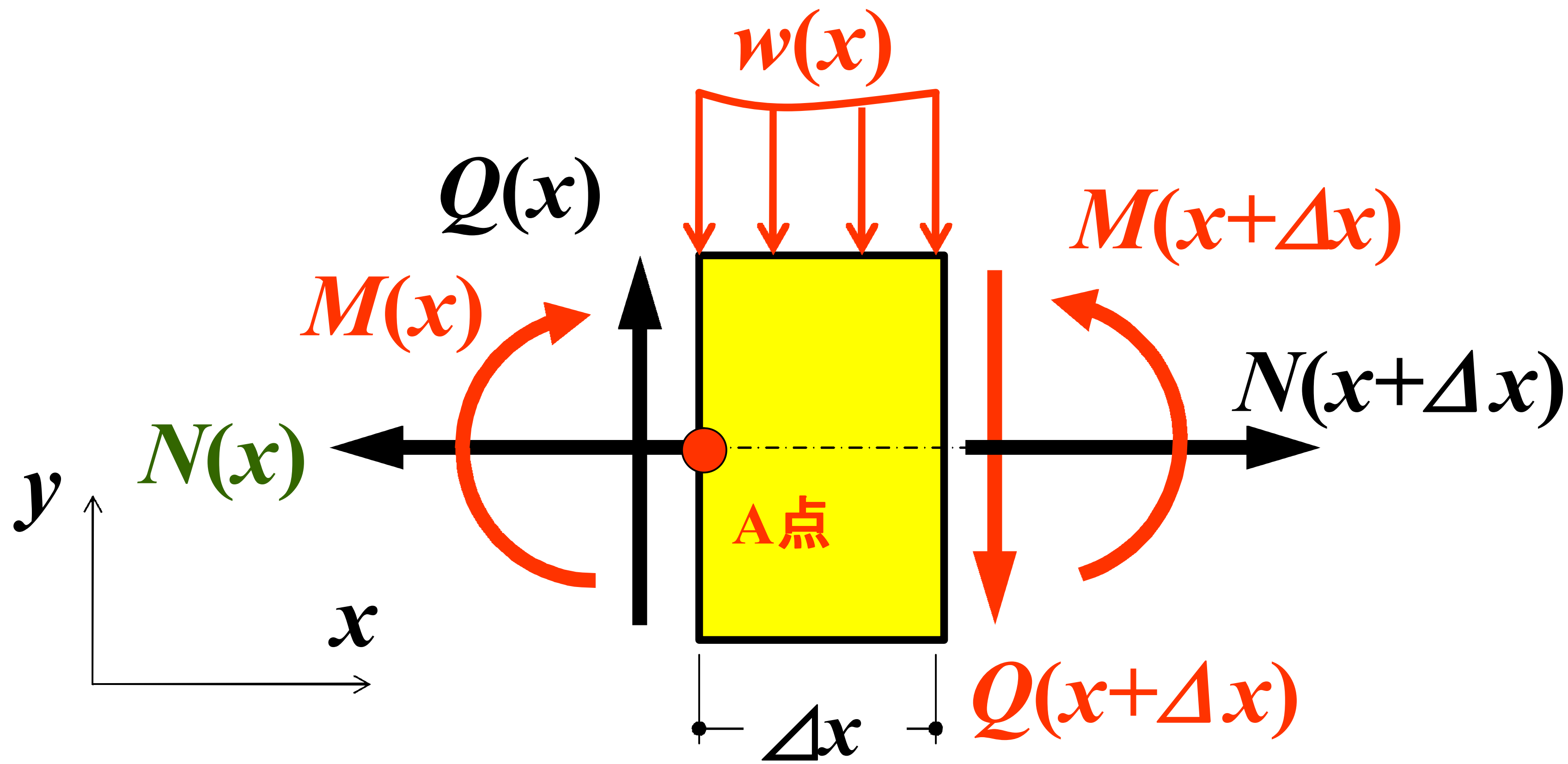
分布荷重
w(x)
x
Δx
w(x)
Q(x)
M(x+Δ x)
M(x)
N(x+Δx)
N(x)
Δx
Q(x+Δ x)



y方向の力の釣合→Σ $Y_i=0$

$$Q(x)-w(x)\cdot\Delta x-Q(x+\Delta x)=0$$

積分の平均値の定理



A点のモーメントの釣合→Σ M_i=0

$$M(x)+w(x)\cdot\Delta x\cdot\frac{\Delta x}{2}-M(x+\Delta x)+Q(x+\Delta x)\cdot\Delta x=0$$

積分の平均値の定理

$$
\begin{cases}
\dfrac{dM(x)}{dx} = Q(x) \\[2ex]
\dfrac{dQ(x)}{dx} = -w(x) \\[2ex]
\therefore \dfrac{d^2M(x)}{dx^2} = -w(x)
\end{cases}
$$

丸暗記

釣合い微分方程式

梁の場合
断面力ーひずみ関係

$$N=\int_A \sigma_x dA$$

$$M=-\int_A y\sigma_x dA$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$N=EA\varepsilon_0$$

$$M=EI\phi$$

p.146

軸方向力－伸びひずみ関係
曲げモーメント－曲率関係（つづき）
断面２次モーメント

・ 軸方向力-伸びひずみ関係

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A E\varepsilon dA = \int_A E(\varepsilon_0 - y\phi)dA = EA\varepsilon_0$$

・ 曲げモーメント-曲率関係

$$\begin{aligned} M &= -\int_A y\sigma dA = -\int_A yE\varepsilon dA = -\int_A yE(\varepsilon_0 - y\varphi)dA \\ &= -\int_A yE(\varepsilon_0 - y\varphi)dA = \int_A Ey^2\varphi dA = E\varphi\int_A y^2 dA \\ &= EI\varphi \quad \boxed{\because \int_A ydA = 0, \quad I \equiv \int_A y^2 dA} \end{aligned}$$

断面２次モーメント

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

・断面図形の形状に依存する断面量で，z軸に関する断面２次モーメントとよばれる

断面係数

p.150～

たわみ曲線をかく
(変形図を書いてみる)

$$EI(x)y''(x) = -M(x)$$

$$\phi \approx -y''(x)$$

$$\boxed{EI(x)\phi = M(x)}$$

- 曲率とはある点でその付近の曲がり方の大小を示す量です．右の式によればEIが同じとき曲げモーメントが大きいほど曲率が大きくなりますので，曲がり方も大きくなります．

曲げを受ける梁要素

- 軸方向力Nが作用していない梁では，軸方向力ー伸びひずみ関係の式から

$$\varepsilon_0 = N/(EA) = 0$$

であり，曲げモーメントー曲率関係の式 $\phi = \dfrac{M}{EI_z}$

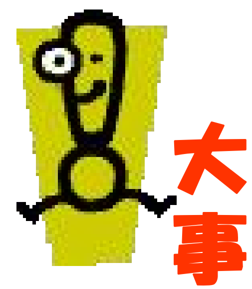
を，図心からyの位置での伸びひずみの式および方向垂直応力度の式に代入する.

$$\varepsilon_x(y) = \varepsilon_0 + y\phi = y\phi = \frac{M}{EI_z} y$$

$$\sigma_x(y) = E\varepsilon_x(y) = E \cdot y\phi = \frac{M}{I_z} \cdot y$$

曲げを受ける梁要素の
軸方向伸びひずみと垂直応力度の分布

$$\varepsilon_x(y) = \frac{M}{EI_z}y$$



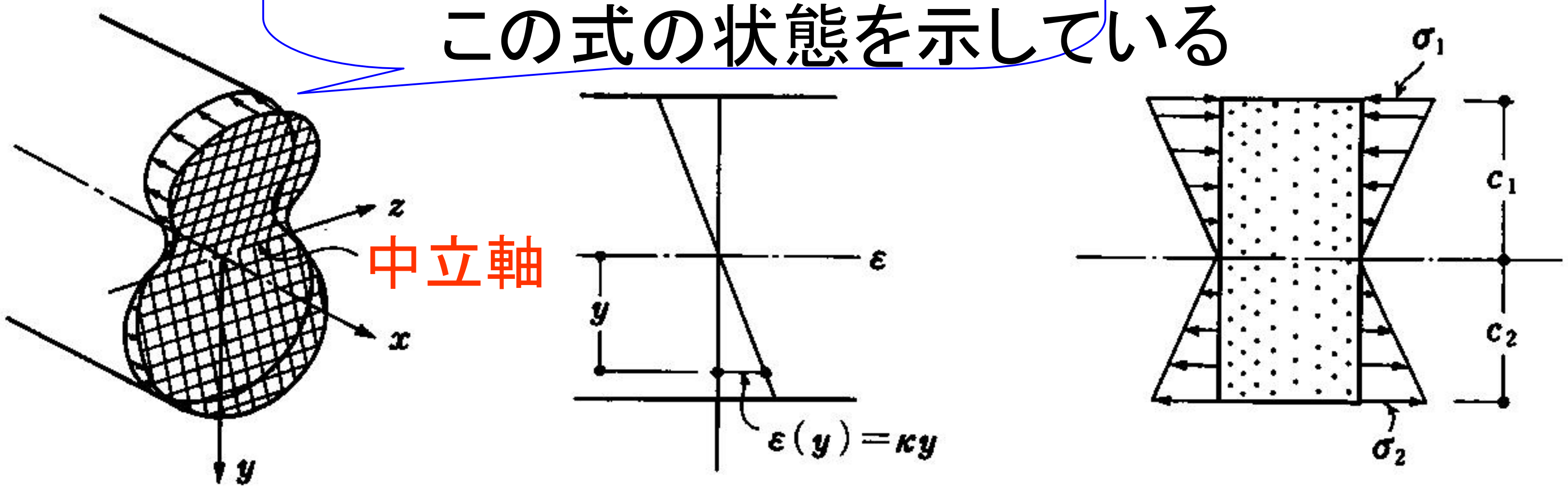
$$\sigma_x(y) = \frac{M}{I_z}\cdot y$$

曲げを受ける梁
応力ブロックと中立軸

- $\sigma_x(y)=0$となる位置は，$\varepsilon_x(y)=0$となる位置すなわち伸び縮みが生じない位置であり，**中立軸と呼ばれる**.

$$\boxed{\varepsilon_x(y)=\frac{M}{EI_z}y}\qquad\boxed{\sigma_x(y)=\frac{M}{I_z}\cdot y}$$

この式の状態を示している



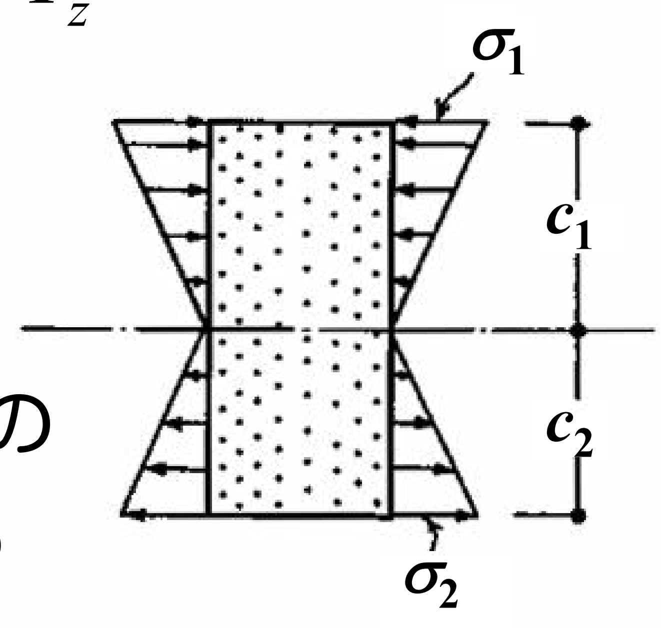
(a) 応力ブロック　(b) ひずみ分布　(c) 垂直応力度分布

断面係数と上下縁応力度

- 軸力が0のとき，梁の上下縁での応力度σ_1, σ_2は，z軸から上下最外縁までの距離をそれぞれc_1, c_2とすると，

$$\sigma_1 = -\frac{M}{I_z} c_1, \quad \sigma_2 = \frac{M}{I_z} c_2$$

- ここで，
$$Z_1 \equiv \frac{I_z}{c_1}, \quad Z_2 \equiv \frac{I_z}{c_2}$$
とおくと，これらは断面２次モーメントI_zと同様，断面図形の形状寸法のみで定まる定数であり，断面係数とよばれる.



（c） 垂直応力度分布

曲げを受ける棒材断面の上下縁応力度

$$\boxed{\sigma_1 = -\frac{M}{Z_1}, \quad \sigma_2 = \frac{M}{Z_2}}$$

断面係数

$$\boxed{Z_1 \equiv \frac{I_z}{c_1}, \quad Z_2 \equiv \frac{I_z}{c_2}}$$